高中数学竞赛专题讲座

丛书策划　李胜宏
丛书主编　陶平生　苏建一
　　　　　刘康宁　边红平

JIHE YU JIANYI LUOJI

集合与简易逻辑

本书主编　苏建一　张　雷

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 集合与简易逻辑 / 陶平生等主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.4
ISBN 978-7-308-05234-4

Ⅰ.高... Ⅱ.陶... Ⅲ.高等数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039722 号

集合与简易逻辑

本书主编 苏建一 张 雷

责任编辑	杨晓鸣 吴昌雷
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
	(网址:http://www.zjupress.com)
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	杭州印校印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	4.5
印 数	00001—10000
字 数	90 千
版 印 次	2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-05234-4
定 价	8.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称 IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

从书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；从书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目　录

第1讲 集合的基本概念

知识点金

1. 集合的概念

集合是一个不定义的概念．集合中的元素有三个特征：

(1)确定性　设 A 是一个给定的集合，a 是某一具体对象，则 a 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两者必居其一，即 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 仅有一种情况成立．

(2)互异性　一个给定的集合中的元素是指互不相同的对象，即同一个集合中不应出现同一个元素．

(3)无序性

2. 集合的表示方法

主要有列举法、描述法、区间法、语言叙述法。常用数集如：$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，应熟记．

3. 子集、真子集及相等集

(1)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\subset B$ 或 $A=B$；

(2)$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$；

(3)$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$．

4. 一个 n 阶集合(即由 n 个元素组成的集合)有 2^n 个不同的子集，其中有 2^n-1 个非空子集，也有 2^n-1 个真子集．

5. 集合的交、并、补运算

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$

要掌握有关集合的几个运算律：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4)0—1律　$A\cup\varnothing=A, A\cap I=A$，

$A\cup I=I, A\cap\varnothing=\varnothing$；

(5)等幂律　$A\cup A=A, A\cap A=A$；

(6)吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$；

(7)求补律　$A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(8)反演律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

6. 有限集合所含元素个数的几个简单性质

设 $n(X)$ 表示集合 X 所含元素的个数，

(1)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

当 $n(A\cap B)=\varnothing$ 时，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$；

(2)$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

例题精析

例1　已知集合 $P=\{m^2-4, m+1, -3\}$，$Q=\{m-3, 2m-1, 3m+1\}$，若 $P\cap Q=\{-3\}$，求实数 m 的值.

分析　我们以交集$\{-3\}$作为切入点.

解

(1)当 $m-3=-3$ 时，得 $m=0$，所以 $P=\{-4,1,-3\}$，$Q=\{-3,-1,1\}$，得 $P\cap Q=\{1,-3\}$，不合题意.

(2)当 $2m-1=-3$ 时，得 $m=-1$，所以 $P=\{-3,0,-3\}$，不符合集合元素的互异性.

(3)当 $3m+1=-3$ 时，得 $m=-\frac{4}{3}$，所以 $P=\left\{-\frac{20}{9},-\frac{1}{3},-3\right\}$，$Q=\left\{-\frac{13}{3},-\frac{11}{3},-3\right\}$，$P\cap Q=\{-3\}$.

所以，本题解为 $m=-\frac{4}{3}$.

评注 本例根据元素的确定性和无序性，给出分类列式，又根据互异性，对结果进行检验.

例 2 若集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$ 且 $B\subseteq A$，求由 m 的可取值组成的集合.

分析 我们可以画数轴作为辅助手段.

解 当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；若 $B\neq\varnothing$，应有
$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}$，即 $\begin{cases}m\geqslant 2\\ m\geqslant -3\\ m\leqslant 3\end{cases}$，

所以 $2\leqslant m\leqslant 3$，故 $m<2$ 或 $2\leqslant m\leqslant 3$，

即所求集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

评注 空集是任何集合的子集，在有关子集的问题时，务必注意这一特殊情况.

例 3 设集合 A、B 都是全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集，已知 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$，求 $\complement_U(A\cup B)$.

分析 我们画韦恩图直观体现其关系.

解 如图 1-1，用方框表示全集 U，用两条封闭曲线分别表示集合 A 和 B. 由 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，就在 A 之外 B 内填上 1；由 $A\cap B=\{3\}$，就在 A、B 的公共部分填上 3；又由 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$，就在 A 与 B 之外，方框之内填上 2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，因此应在 A 之内 B 之外填写 4. 由图 1-1 可知 $A\cup B=\{1,3,4\}$，从而 $\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

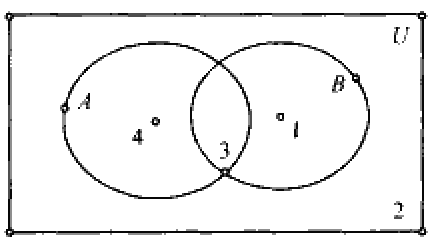


图 1-1

评注 韦恩图常常可以帮助我们直观理解某些关系.

例 4 已知 a,b 为实数，集合 $A=\{a,a^2,ab\}$，$B=\{1,a,b\}$，若 $A=B$，求 $a^{2004}+b^{2004}$ 的值.

分析 一般，我们常用的是分类讨论，我们在这里可以利用集合的无序性.

解 由于 $a=A\cap B$，且 $A=B$ 得：$\begin{cases}a^2\cdot ab=1\cdot b\\a^2+ab=1+b\end{cases}$，所以 $\begin{cases}b(a^3-1)=0\\(a-1)(1+b)=0\end{cases}$，由集合中元素的互异性，得 $a\neq 0,1$. 所以 $a=-1,b=0$.

评注 本题灵活运用集合的性质，避免了分类讨论.

例 5 已知集合 $A=\{x\mid(x-2)[x-(3a+1)]<0\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-2a}{x-(a^2+1)}<0\right.\right\}$.

(1)当 $a=2$ 时，求 $A\cap B$；

(2)求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

分析 我们先将集合化简，再处理.

解

(1)当 $a=2$ 时，$A=(2,7)$，$B=(4,5)$，所以 $A\cap B=(4,5)$.

(2)因为 $B=(2a,a^2+1)$，当 $a<\dfrac{1}{3}$ 时，$A=(3a+1,2)$，要使 $B\subseteq A$，必须 $\begin{cases}2a\geqslant 3a+1\\a^2+1\leqslant 2\end{cases}$，此时 $a=-1$；

当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时，$A=\varnothing$，使 $B\subseteq A$ 的 a 不存在；

当 $a>\dfrac{1}{3}$ 时，$A=(2,3a+1)$，要使 $B\subseteq A$，必须 $\begin{cases}2a\geqslant 2\\a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$，此时 $1\leqslant a\leqslant 3$.

综上可知，使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围为 $[1,3]\cup\{-1\}$.

评注 本题注意分类讨论.

例 6 已知集合 $M=\{f(x)\mid f(x)+f(x+2)=f(x+1),x\in\mathbf{R}\}$，$g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}$.

(1)试证明函数 $g(x)\in M$；

(2)集合 M 中的元素都是周期函数吗？试证明你的结论；

(3)集合 M 中的元素都是奇函数吗？试证明你的结论.

解

(1)因为 $\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi(x+1)}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}=\sin\left(\dfrac{\pi(x+1)}{3}\right)$，

所以 $g(x)\in M$.

(2)考虑到 $g(x)\in M$，且 $g(x)$ 周期为 6，猜想 $f(x)$ 是周期为 6 的函数.

事实上，由 $f(x)+f(x+2)=f(x+1)$，则有 $f(x+1)+f(x+3)=f(x+2)$，从而有 $f(x)+f(x+3)=0$，即 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x+6)=f(x+3+3)=-f(x+3)=-[-f(x)]=f(x)$，猜想成立，即 $f(x)$ 的周期为 6.

(3)考虑 $g(x)$ 对偶函数 $\varphi(x)=\cos\dfrac{\pi x}{3}$，易证 $\varphi(x)\in M$. 但 $\varphi(x)=\cos\dfrac{\pi x}{3}$ 为偶函数而

非奇函数.故 M 中的元素不都是奇函数.

评注 值得注意的是,我们很容易将这样的函数与递推数列联系在一起.事实上,我们经常会看到数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$,进而寻求数列中项的一些特征.通过解这个题,我们对数列a_n有了更深入的了解.

例 7 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体:存在非零常数 T,对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+T)=Tf(x)$成立.

(1)函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M?说明理由;

(2)设函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$的图象与 $y=x$ 的图象有公共点,证明:$f(x)=a^x\in M$;

(3)若函数 $f(x)=\sin kx\in M$,求实数 k 的取值范围.

分析 本题旨在利用新的定义,考查读题及对新定义的理解能力.

解

(1)对于非零常数 T,$f(x+T)=x+T$,$Tf(x)=Tx$.因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,$x+T=Tx$ 不能恒成立,所以 $f(x)=x\notin M$.

(2)因为函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象与函数 $y=x$ 的图象有公共点,所以方程组:$\begin{cases}y=a^x\\y=x\end{cases}$有解,消去 y 得 $a^x=x$,

显然 $x=0$ 不是方程 $a^x=x$ 的解,所以存在非零常数 T,使 $a^T=T$.

于是对于 $f(x)=a^x$ 有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$,故 $f(x)=a^x\in M$.

(3)当 $k=0$ 时,$f(x)=0$,显然 $f(x)=0\in M$.

当 $k\neq0$ 时,

因为 $f(x)=\sin kx\in M$,所以存在非零常数 T,对任意 $x\in\mathbf{R}$,

有 $f(x+T)=Tf(x)$成立,即 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$.

因为 $k\neq0$,且 $x\in\mathbf{R}$,所以 $kx\in\mathbf{R}$,$kx+kT\in\mathbf{R}$,

于是 $\sin kx\in[-1,1]$,$\sin(kx+kT)\in[-1,1]$.

故要使 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 成立,只有 $T=\pm1$.

当 $T=1$ 时,

$\sin(kx+k)=\sin kx$ 成立,则 $k=2m\pi$,$m\in\mathbf{Z}$.

当 $T=-1$ 时,

$\sin(kx-k)=-\sin kx$ 成立,即 $\sin(kx-k+\pi)=\sin kx$ 成立.

则 $-k+\pi=2m\pi$,$m\in\mathbf{Z}$,即 $k=-2(m-1)\pi$,$m\in\mathbf{Z}$.

综合得,实数 k 的取值范围是$\{k\mid k=m\pi,m\in\mathbf{Z}\}$.

例 8 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\}$.

(1)证明：$A\subseteq B$；

(2)当 $A=\{-1,3\}$ 时，求 B；

(3)当 A 只有一个元素时，求证：$A=B$.

分析 注意：我们要从整体上把握两个集合的内在联系.

解

(1)设任意 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$. 而 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，

故 $x_0\in B$，所以 $A\subseteq B$.

(2)因为 $A=\{-1,3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1\\3^2+a\cdot 3+b=3\end{cases}，解得\ a=-1,b=-3.$$

故 $f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f[f(x)]$ 得

$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0$，

解得 $x=-1,3,\pm\sqrt{3}$，

$B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(3)不妨设 $A=\{c\}$，则 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有重根 c. 由韦达定理可得

$a=1-2c,b=c^2$ 并且 $x^2+(a-1)x+b=(x-c)^2+x$，

代入 $x=f[f(x)]$ 可得：

$[(x-c)^2+x]^2+a[(x-c)^2+x]+b=x$，即

$[(x-c)^2+x]^2+(1-2c)[(x-c)^2+x]+c^2=x$，

整理得 $(x-c)^2[(x-c+1)^2+1]=0$，

所以 $B=\{c\}$，即 $A=B$.

评注 注意利用韦达定理统一变量.

思考交流

思考题 已知 $S=(a,b,c,d)$，我们有多少种方式选出两个子集 A,B，使得 $S=A\cup B$?

分析 一般，我们常用的方法是分类讨论，也可以利用排列组合有关知识.

解 设子集 A 与 B 满足条件，则集合 S 中的每一个元素要么只属于 A，要么只属于

B,要么属于 A 与 B 的交集,并且除了 $A=B=S$ 外,每个集合被重复计算,所以共有 $\frac{3^4+1}{2}=41$ 种方式.

评注 我们换一个角度分析问题,避免了按子集元素个数分类的讨论.

同步检测1

一、选择题

1. 设集合 $P=\{3,4,5\}$,$Q=\{4,5,6,7\}$. 定义 $P※Q=\{(a,b)\mid a\in P,b\in Q\}$,则 $P※Q$ 中元素的个数为 ( )

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 12

2. 设 A、B 是两个集合,定义 $A-B=\{x\mid x\in A$,且 $x\notin B\}$. 若 $M=\{x\mid |x+1|\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x=|\sin\alpha|,\alpha\in \mathbf{R}\}$,则 $M-N=$ ( )

A. $[-3,1]$　　B. $[-3,0)$　　C. $[0,1]$　　D. $[-3,0]$

3. 已知全集为 R,集合 $P=\{x\mid |x-2|>1\}$,$Q=\{x\mid x^2-6x+5<0\}$,则 $(\complement_R P)\cup Q=$ ( )

A. $\{x\mid 1<x<5\}$　　B. $\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$　　C. $\{x\mid 1\leqslant x<5\}$　　D. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$

4. 集合 $M=\{y\mid y=x^2-1\}$,$N=\{x\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$,则 M 与 N 的关系是 ( )

A. $M\supseteq N$　　B. $M\subseteq N$　　C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\in P\\ -x, x\in M\end{cases}$,其中 P、M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集,又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$,$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$,给出下列四个判断:

①若 $P\cap M=\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$

②若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$

③若 $P\cup M=R$,则 $f(P)\cup f(M)=R$

④若 $P\cap M\neq R$,则 $f(P)\cup f(M)\neq R$

其中正确判断有 ( )

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

6. 若非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且若 $a\in S$,则必有 $6-a\in S$,则所有满足上述条件的集合 S 共有 ( )

A. 6个　　B. 7个　　C. 8个　　D. 9个

二、填空题

7. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ ________.

8. 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2,x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

9. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x|f(x)<0\}$，$Q=\{x|g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P，Q 表示为________.

10. 设 I 是全集，非空集合 P，Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$. 若含 P，Q 的一个集合运算表达式使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是________(只要写出一个表达式).

11. 设集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-1}=2,x,y\in \mathbf{R}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|4x+ay=16,x,y\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值为________.

12. 已知集合 $M=\{x|1\leqslant x\leqslant 10,x\in \mathbf{N}\}$，对它的非空子集 A，将 A 中每个元素 k 都乘以 $(-1)^k$，再求和(如 $A=\{1,3,6\}$，可求得和为 $(-1)\cdot 1+(-1)^3\cdot 3+(-1)^6\cdot 6=2$)，则对 M 的所有非空子集，这些和的总和是________.

三、解答题

13. 在一次数学竞赛中，共出甲、乙、丙三题. 在所有 25 个参赛的学生中，每个学生至少解出一题. 在所有没有解出甲题的学生中，解出乙题的人数是解出丙题的人数的两倍；只解出甲题的学生比余下的学生中解出甲题的学生的人数多 1；只解一题的学生中，有一半没有解出甲题. 问共有多少学生只解出乙题?

14. 集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$，$B=\{(x,y)|x-y+1=0$ 且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，求 m 的取值范围.

15. 设 a、b 为常数，$M=\{f(x)|f(x)=a\cos x+b\sin x\}$；$F$：把平面上任意一点 (a,b) 映射为函数 $a\cos x+b\sin x$.

(1) 证明：不存在两个不同点对应于同一个函数；

(2) 证明：当 $f_0(x)\in M$ 时，$f_1(x)=f_0(x+t)\in M$，这里 t 为常数；

(3) 对于属于 M 的一个固定值 $f_0(x)$，得 $M_1=\{f_0(x+t),t\in \mathbf{R}\}$，在映射 F 的作用下，M_1 作为象，求其原象，并说明它是什么图象.

第2讲 简易逻辑

知识点金

基础知识

(1)命题与逻辑联结词

命题：可以判断真假的语句.

逻辑联结词：或、且、非.

简单命题：不含逻辑联结词的命题.

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

复合命题三种形式：p 或 q；p 且 q；非 p.

复合命题真假判断：

p 或 q：p 与 q 同假为假，否则为真；

p 且 q：p 与 q 同真为真，否则为假；

非 p：与 p 的真假相反.

(2)四种命题：

原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$；

互为逆否的两个命题是等价的。

反证法步骤：假设结论不成立→推出矛盾→假设不成立.

(3)充分条件与必要条件：

如果 $A\Rightarrow B$，则称 A 是 B 的充分条件，同时称 B 是 A 的必要条件.

(4)假言命题"若 p 则 q"，也是复合命题，并且与"非 p 或 q"等价.

例题精析

例 1 已知命题 p：方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解；命题 q：只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$. 若命题"p 或 q"是假命题，求 a 的取值范围.

解 由 $a^2x^2+ax-2=0$ 得 $(ax+2)(ax-1)=0$.

显然 $a\neq 0$，$\therefore x=-\dfrac{2}{a}$ 或 $x=\dfrac{1}{a}$.

因为 $x\in[-1,1]$，故 $\left|\dfrac{2}{a}\right|\leqslant 1$ 或 $\left|\dfrac{1}{a}\right|\leqslant 1$，所以 $|a|\geqslant 1$.

只有一个实数满足 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$，即抛物线 $y=x^2+2ax+2a$ 与 x 轴只有一个交点，所以 $\Delta=4a^2-8a=0$，所以 $a=0$ 或 2.

命题"p 或 q"为真命题时 $|a|\geqslant 1$ 或 $a=0$.

因为命题"p 或 q"为假命题，所以 a 的取值范围为 $\{a|-1<a<0$ 或 $0<a<1\}$.

评注 本题也可以由真值表先判断出 p、q 都是假命题，再解题.

例 2 已知 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$；$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件．求实数 m 的取值范围.

解 由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$，

因为 $\neg q$ 即 $A=\{x|x<1-m$，或 $x>1+m(m>0)\}$；

由 $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，所以 $\neg p$ 即 $B=\{x|x<-2$，或 $x>10\}$，

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，且 $m>0$，所以 $A\subsetneqq B$，故 $\begin{cases}1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\\m>0\end{cases}$，且不等式组中的第一、二两个不等式不能同时取等号，解得 $m\geqslant 9$ 为所求.

评注 以命题及充要条件为桥梁考查其他数学知识是常见题型.

例 3 设 a,b 为正数，求证：不等式 $\sqrt{a}+1>b$ 成立的充要条件是对于任意实数 $x>1$，有 $ax+\dfrac{x}{x-1}>b$.

分析 我们应该注意从两方面证明.

证明 充分性：因为 $ax+\frac{x}{x-1}=ax+1+\frac{1}{x-1}=a(x-1)+\frac{1}{x-1}+a+1$，

又 $x>1$，所以 $a(x-1)+\frac{1}{x-1}+a+1\geqslant 2\sqrt{a}+a+1=(\sqrt{a}+1)^2$，

即当 $x>1,a>0$ 时，$ax+\frac{x}{x-1}$的最小值是$(\sqrt{a}+1)^2$.

欲使对任意实数 $x>1$，都有 $ax+\frac{x}{x-1}>b$ 成立，则只须$(\sqrt{a}+1)^2>b$.

又 $b>0$，所以$\sqrt{a}+1>b$，即充分性成立.

必要性：由前面知，当 $x>1$ 时，$ax+\frac{x}{x-1}\geqslant(\sqrt{a}+1)^2$.

又$\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$，所以$(\sqrt{a}+1)^2>b$，所以 $ax+\frac{x}{x-1}>b$，必要性也成立.

综上，原命题正确.

例 4 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0,p\neq 1)$，求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

解 $a_1=S_1=p+q$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$.

因为 $p\neq 0,p\neq 1$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$.

若$\{a_n\}$为等比数列，则$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$，所以$\frac{p(p-1)}{p+q}=p$.

因为 $p\neq 0$，所以 $p-1=p+q$，所以 $q=-1$.

这是$\{a_n\}$为等比数列的必要条件.

再证 $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充分条件.

当 $q=-1$ 时，$a_1=p-1$，也适合 $a_n=p^{n-1}(p-1)$.

所以 $a_n=p^{n-1}(p-1)(n\in\mathbf{N})$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=p(n\in\mathbf{N})$，所以$\{a_n\}$是等比数列.

所以 $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充要条件.

评注 我们找到必要条件后，还要注意验证是否是充分条件.

思考交流

思考题 命题“若整数 a、b 不全是奇数，则 $a+b$ 是偶数.”的否定命题是“若整数 a、b 不全是奇数，则 $a+b$ 不是偶数.”吗？

分析与解：不是．原命题与否定命题应该一真一假，而这两个命题都是假命题，矛盾．由于假言命题“若 p 则 q”与“非 p 或 q”等价，因而否定命题为“p 且非 q”．所以存在整数 a、b 不全是奇数并且 $a+b$ 不是偶数．

同步检测2

一、选择题

1. 有下列四个命题：

①“若 $x+y=0$，则 x、y 互为相反数”的逆命题；

②“全等三角形的面积相等”的否命题；

③“若 $q\leqslant 1$，则 $x^2+2x+q=0$ 有实根”的逆否命题；

④“不等边三角形的三个内角相等”的逆命题．

其中真命题为 （　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④

2. 命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件．命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$．则 （　　）

A. “p 或 q”为假　　B. “p 且 q”为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

3. 若命题 P：$x\in A\cup B$，则 $\neg P$ 是 （　　）

A. $x\notin A$ 且 $x\notin B$　　B. $x\notin A$ 或 $x\notin B$

C. $x\notin A\cap B$　　D. $x\in A\cap B$

4. 如果命题 P：$\varnothing\in\{\varnothing\}$，命题 Q：$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，那么下列结论不正确的是 （　　）

A. “P 或 Q”为真　　B. “P 且 Q”为假

C. “非 P”为假　　D. “非 Q”为假

5. 集合 $A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0$，$B=\{x||x-b|<a\}$，若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件，则 b 的取值范围是 （　　）

A. $-2\leqslant b<0$　　B. $0<b\leqslant 2$　　C. $-3<b<-1$　　D. $-1\leqslant b<2$

6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件．那么 p 是 q 成立的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

7. 把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题：

若函数 $f(x)=3+\log_3 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称，则函数 $g(x)=$________.

注：填上你认为可以成为真命题的一种情形即可，不必考虑所有可能的情形.

8. 设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；　②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；　④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________.（把符合要求的命题序号都填上.）

9. 设集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，则 $B\subsetneqq A$ 的一个充分不必要条件是________.

三、解答题

10. 已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求实数 m 的取值范围.

11. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，求证 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

12. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1) 当 $b>0$ 时，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant 1$，证明 $a\leqslant 2\sqrt{b}$；

(2) 当 $b>1$ 时，证明对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$；

(3) 当 $0<b\leqslant 1$ 时，讨论对任意 $x\in[0,1]$，总存在 $f(x)\leqslant 1$ 的充要条件.

第3讲 几种数学思想在集合中的应用

知识点金

函数思想：就是从分析问题的数量关系出发，建立函数关系，然后用函数的方法去解决问题.

数形结合：是将抽象的数学语言与直观图形结合起来，通过数与形的相互转化来解决问题.

分类讨论：实质是逻辑划分，它是将整体问题化为部分问题来解决.

转化化归：是将新的问题转化为我们较熟悉的旧的问题加以解决.

例题精析

例1 集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+mx+2\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y+1=0$ 且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 m 的取值范围.

分析 我们脱去集合的外衣，将其转化为函数与方程的问题.

解 由 $\begin{cases} y=x^2+mx+2 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$，可得 $x\neq 0$，并且 $m=-x-\dfrac{1}{x}+1$.

当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，$x\in(0,2]$，$-x-\dfrac{1}{x}+1\leqslant -1$，即 $m\leqslant -1$.

评注 此解法是函数思想的运用，也可以用二次函数根的分布解决.

例2 已知集合 $M=\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$ 和 $N=\left\{(x,y)\mid \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right\}$，求集合 M 和 N 的关系.

分析与解 我们观察其特点，利用数形结合来解决问题. 集合 M 表示以 $A(0,1)$，$B(-1,0)$，$C(0,-1)$，$D(1,0)$ 为顶点的正方形 $ABCD$ 的内部；集合 N 表示以 $F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$F_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 为焦点，长轴为 $2\sqrt{2}$ 的椭圆的内部. 又正方形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆内部，因此 M 是 N 的真子集.

例3 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq 0$

令 $f(x)=0$，解得其两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$.

由此可知 $x_1<0$，$x_2>0$.

(i) 当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\frac{6}{7}$.

(ii) 当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$.

综上，使 $A\cap B=\varnothing$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

评注 本题以二次函数、一元二次方程和一元二次不等式的内在联系为背景，综合考查了函数与方程思想、分类讨论思想和数形结合思想.

例4 已知 $\begin{cases}x^2-x-2>0\\ 2x^2+(5+2k)x+5<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$，求 k 的取值范围.

分析 我们利用数轴辅助分析第二个不等式的根的分布情况.

解 由 $x^2-x-2>0$ 得 $x>2$ 或 $x<-1$，又原不等式的整数解只有 -2，分析可得方程 $2x^2+(5+2k)x+5=0$ 的两个根分别位于 $[-3,-2)$ 与 $(-2,3]$.

设 $f(x)=2x^2+(5+2k)x+5$，则 $\begin{cases}f(-3)\geqslant 0\\ f(-2)<0\\ f(3)\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}k\leqslant\frac{4}{3}\\ k>\frac{3}{4}\\ k\geqslant-\frac{19}{3}\end{cases}$，所以 $\frac{3}{4}<k\leqslant\frac{4}{3}$.

评注 本题借助数轴将原问题转化为二次函数根的分布的问题.

例 5 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α,β,$x^2-bx+c=0$ 的两根为 γ,δ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 互不相同).设 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$,$u,v\in M(u\neq v)$,$S=\{x\mid x=u+v\}$,$P=\{x\mid x=u,v\}$. 又 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$,$P=\{6,10,14,15,21,35\}$,求 a,b,c.

分析与解 我们观察集合 P 和 S,发现 10 是唯一的公共元素,又由韦达定理知 $\alpha\beta=b=\gamma+\delta$. 由此可得 $\alpha\beta=\gamma+\delta=b=10$. 由集合 S 各个元素的和为 51,即 $3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=51$,可得 $\alpha+\beta=7$. 所以 $a=7$. 又集合 P 各个元素的积为 210^3,即$(\alpha\beta\gamma\delta)^3=210^3$,所以 $c=21$.

例 6 已知 $P=\left[\frac{1}{2},2\right]$,$Q=\{x\mid ax^2-2x+2>0\}$.

(1)若 $P\cap Q\neq\varnothing$,求 a 的范围;

(2)若 $R=\{x\mid ax^2-2x+2=0\}$,且 $P\cap R\neq\varnothing$,求 a 的范围.

分析 我们发现利用根的分布讨论较多,能否分离参量呢?

解 (1)$P\cap Q\neq\varnothing$,只要存在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$使得 $ax^2-2x+2>0$,即

$a>\frac{2-2x}{x^2}=2\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)$,设 $f(x)=2\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)$,则 $f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},4\right]$,所以只要 $a>-\frac{1}{2}$.

(2)$P\cap R\neq\varnothing$. 只要存在 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$使得 $ax^2-2x+2=0$,

由(1)可知 $a\in\left[-\frac{1}{2},4\right]$.

思考交流

思考题 用另一种方法解答例 3.

解 当 $a>0$ 时,$f(x)$开口向上,只要 $f(1)>0$ 或 $f(3)>0$,即 $a-2-2a>0$ 或 $9a-6-2a>0$,又由 $a>0$ 解得 $a>\frac{6}{7}$.

当 $a<0$ 时,$f(x)$开口向下且对称轴为 $x=\frac{1}{a}<0$,所以 $f(x)$在$(1,3)$上单调递减,所以只要 $f(1)>0$,即 $a-2-2a>0$,解得 $a<-2$.

综上,使 $A\cap B=\varnothing$成立的 a 的取值范围为$(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

评注　这里我们利用二次函数根的性质及根的分布巧妙解题，减少了计算量.

同步检测3

1. 已知 $A=\{x\mid x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$. 求 a，b 的值.

2. 已知抛物线 $y=-x^2+mx-1$，点 $A(3,0)$，$B(0,3)$，求抛物线与线段 AB 有两个不同交点时 m 的范围.

3. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，求实数 b 的取值范围.

4. $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$. 其中，$a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{N}^*$. 若 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$，且 $A\cup B$ 中所有的元素和为 124. 求集合 A、B.

5. 设不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M，若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

6. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid y=ax+b,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x^2+15,x\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$. 是否存在 a、b 使 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,b)\in C$?

7. 已知 $A=\{x\mid kx^2-2x+6k<0,k\neq 0\}$

(1)若 $A\subsetneqq(2,3)$，求 k 的范围；

(2)若 $(2,3)\subseteq A$，求 k 的范围；

(3)若 $A\cap(2,3)\neq\varnothing$，求 k 的范围.

第4讲　集合与元素

知识点金

元素与集合只有属于和不属于两种关系，但如何判定一个元素是否属于该集合，有时要进行适当甚至灵活的变形，达到集合所要求的形式.

例题精析

例1　设 $A=\{a\,|\,a=x^2-y^2, x、y\in\mathbf{Z}\}$，求证：

(1)一切奇数属于 A；

(2)偶数 $4k-2(k\in\mathbf{Z})$ 不属于 A；

(3)属于 A 的两个整数，其积仍属于 A.

分析　关键构造出集合元素所需形式.

证明　(1)设 a 为任意奇数，则 $a=2k-1(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，$k,k-1\in\mathbf{Z}$，故 $a\in A$.

由 a 的任意性知，一切奇数属于 A.

(2)假设 $4k-2\in A$，则存在 $x、y\in\mathbf{Z}$ 使 $4k-2=x^2-y^2$，

即 $(x+y)(x-y)=2(2k-1)$……………………………………………………………… ①

①式说明 $x+y$ 与 $x-y$ 必有一个是偶数，但 $x+y$ 与 $x-y$ 具有相同的奇偶性，这是一对矛盾，故①不成立.

所以 $4k-2\notin A$.

(3)设 a、$b\in A$,则

$a=x_1^2-y_1^2$,

$b=x_2^2-y_2^2(x_1,x_2,y_1,y_2\in \mathbf{Z})$.

因为 $ab=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)$

$=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2$

$=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2$.

而 $x_1x_2-y_1y_2\in \mathbf{Z}$,$x_1y_2-x_2y_1\in \mathbf{Z}$,所以 $ab\in A$.

例 2 (全国女子数学奥林匹克)如果存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得 $k+a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是完全平方数,就称 n 为"好数".试问:在集合 $\{11,13,15,17,19\}$ 中,哪些是"好数",哪些不是"好数"?说明理由.

解 除了 11 之外都是"好数".

(1)易知 11 只能与 5 相加得到 4^2,而 4 也只能与 5 相加得到 3^2,因此,不存在满足条件的数列,所以 11 不是"好数".

(2)13 是"好数",因为如下的排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,13)$都是完全平方数:

k:1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13

a_k:8　2　13　12　11　10　9　1　7　6　5　4　3

(3)15 是"好数",因为如下的排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,15)$都是完全平方数:

k:1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15

a_k:15　14　13　12　11　10　9　8　7　6　5　4　3　2　1

(4)17 是"好数",因为如下的排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,17)$都是完全平方数:

k:1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15　16　17

a_k:3　7　6　5　4　10　2　17　16　15　14　13　12　11　1　9　8

其中用到了轮换(1,3,6,10,15).

(5)19 是"好数",因为如下的排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,19)$都是完全平方数:

k:1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15　16　17　18　19

a_k:8　7　6　5　4　3　2　1　16　15　14　13　12　11　10　9　19　18　17

评注 这里问题的关键在于构造满足条件的排列.

例 3 (亚太地区数学竞赛)求所有由正整数组成的有限非空集合 S,满足:若 $m,n\in S$,则 $\frac{m+n}{(m,n)}\in S$,(m,n 不必须不同).

分析 我们由特殊的情形,先得知 $2\in S$,进而循序渐进探索集合 S 中可能含有的其他元素,发现集合中可能只有 2 这一个元素.那么,如何进行简捷的表达呢?

解 $m=n$,则 $2\in S$,由于 S 是非空有限集合,若 S 中存在奇数,则 $\frac{k+2}{(k,2)}=k+2\in S$,

以此类推，$k+4,k+6,\cdots$都属于S，与其是有限集矛盾，所以S中的元素都是偶数．如果除了2以外还有其他偶数，不妨设除2以外的最小数为$k(k>2)$，则$\frac{k+2}{(k,2)}=\frac{k}{2}+1\in S$，并且$2<\frac{k}{2}+1<k$，而由前面讨论知$\frac{k}{2}+1$应该为偶数，这与$k$为除2以外的最小数矛盾，所以$S=\{2\}$.

评注 这里应用极端原理使得表达简捷.

例4 S_1,S_2,S_3为非空集合，对于1，2，3的任意一个排列i,j,k，若$x\in S_i$，$y\in S_j$，则$x-y\in S_k$. 证明：三个集合中至少有两个相等.

证明 若$x\in S_i$，$y\in S_j$，则

$$y-x\in S_k,(y-x)-y=-x\in S_i$$

所以每个集合中均有非负元素.

当三个集合中的元素都为零时，命题显然成立.

否则，设S_1,S_2,S_3中的最小正元素为a，不妨设$a\in S_1$；设b为S_2,S_3中最小的非负元素，不妨设$b\in S_2$；则$b-a\in S_3$.

若$b>0$，则$0\leqslant b-a<b$，与b的取法矛盾，所以$b=0$.

任取$x\in S_1$，因$0\in S_2$，故$x-0=x\in S_3$，所以$S_1\subseteq S_3$. 同理，$S_3\subseteq S_1$.

所以$S_1=S_3$.

评注 这里也借助极端原理探索解答.

例5 设S_n表示正整数集合$\{1,2,3,\cdots,100\}$的某些子集满足条件：没有一个数是另一个数的2倍．这样的子集中所含元素最多有多少个？

解 令$A_1=\{51,52,53,\cdots,100\}$，

$A_2=\{26,27,\cdots,50\}$，

$A_3=\{13,14,\cdots,25\}$，

$A_4=\{7,8,\cdots,12\}$，

$A_5=\{4,5,6\}$，

$A_6=\{2,3\}$，

$A_7=\{1\}$，

则$A=A_1\cup A_3\cup A_5\cup A_7$符合条件．该集合共有$50+13+3+1=67$(个)．，

下证A是符合条件中含元素最多的集合.

若$B\subseteq\{1,2,3,\cdots,100\}$，其中每一个元素都不是另一个的2倍，则$a\in B$时，$2a\notin B\cap A_2$.

所以，$\text{Card}(B\cap A_2)+\text{Card}(B\cap A_1)\leqslant 50$.

同理，$\text{Card}(B\cap A_4)+\text{Card}(B\cap A_3)\leqslant 13$.

$\text{Card}(B\cap A_6)+\text{Card}(B\cap A_5)\leqslant 3.$

所以 Card $B\leqslant 50+13+3+1=67$.

评注 证明和构造是解决该类问题的两个方法.

例 6 设集合 $S=\{1,2,\cdots,50\}$,X 是 S 的任意子集,$|X|=n$.求最小正整数 n,使得集合 X 中必有三个数为直角三角形的三条边长.

解 设直角三角形三边长分别为 x,y,z,有 $x^2+y^2=z^2$,

其正整数解可表示为

$$x=k(a^2-b^2),y=2kab,z=k(a^2+b^2) \quad ①$$

其中 $k,a,b\in\mathbf{N}^*$ 且 $(a,b)=1,a>b$.

x,y,z 中必有一个为 5 的倍数.

否则,若 a,b,c 均不是 5 的倍数,则 a,b,c 都是形如 $5m\pm1,5m\pm2$ 的数($m\in N$),

则 $a^2\equiv\pm1 \pmod 5$,$b^2\equiv\pm1 \pmod 5$,$c^2\equiv\pm1 \pmod 5$,而 $c^2=a^2+b^2\equiv0$ 或 ±2,矛盾!

令集 $A=\{S$ 中所有与 5 互质的数$\}$,则 Card $A=40$.

若以 10,15,25,40,45 分别作直角三角形的某边长,则由(1)知可在 A 中找到相应的边构成如下直角三角形:

(10,8,6),(26,24,10),(15,12,9),(17,15,8),(39,36,15),(25,24,7),(40,32,24),(41,40,9),(42,27,36).

此外,A 中再没有能与 10,15,25,40,45 构成直角三角形三边的数.

令 $M=A\cup\{10,15,25,40,45\}/\{8,9,24,36\}$,则 Card $M=41$.

由以上知,A 中三数不能组成直角三角形.

由于 M 中不含 8,9,24,36,所以 10,15,25,40,45 在 M 中找不到可搭配成直角三角形三边的数,即 M 中任意三数均不构成直角三角形三边.故 $n\geqslant42$.

另外,由①的整数解可作集合

$B=\{\underline{3,4,5},\underline{17,15,8},\underline{29,21,20},\underline{25,24,7},\underline{34,16,30},\underline{37,35,12},\underline{50,48,14},\underline{41,40,9},\underline{45,36,27}\}$,

其中横线上三数可作直角三角形三边,Card $B=27$.

S/B 中元素的个数为 $50-27=23$,在 S 中任取 42 个数. 因 $42-23=19$,于是取的 42 个数中必含有 B 中的 19 个数,因此 B 中至少有一条横线上的三个数在所选的 42 个数中,即任取 42 个数,其中至少有三数可作直角三角形三边.因此,n 的最小值为 42.

思考交流

思考题 （美国数学竞赛）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数列，并且它们的最大公因子为 1，令 S 为一个整数集合，具有下列性质：

(1) $a_i \in S$，$(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) 对 $i,j=1,2,\cdots,n$（不必须相同）$a_i - a_j \in S$；

(3) 对于任意 x、$y \in S$，如果 $x+y \in S$，则 $x-y \in S$．

证明：S 必为整数集．

分析 本题条件较多，解题关键在于循序渐进．

证明 不妨假定任何一个 a_i 都不等于 0．先考察

(i) $0 = a_1 - a_1 \in S$（由(2)）．

(ii) $-s = 0 - s \in S$，其中 $s \in S$，（由(2)与(3)）．

(iii) 如果 x、$y \in S$，且 $x-y \in S$，则 $x+y \in S$（由(3)和(ii)）．

利用(iii)，再对 m 使用数学归纳法，可以证明：当 $s \in S$ 时，对任何 $m \in N$，均有 $ms \in S$．再利用(i)、(ii)，可以证明：当 $m \in \mathbf{Z}$ 时，上述结论仍然成立．

于是，有(iv)对于 $i=1,2,\cdots,n$，集合 S 包含了 a_i 的所有倍数．

下面验证(v)对于 i、$j \in \{1,2,\cdots,n\}$，对任给的整数 c_i、c_j，有 $c_i a_i + c_j a_j \in S$．

为证明这一点，对 $|c_i| + |c_j|$ 使用归纳法．

如果 $|c_i| \leqslant 1$，且 $|c_j| \leqslant 1$，利用(2)、(ii)、(iii)，立即可导出结论．因而，可假定 $\max\{|c_i|, |c_j|\} \geqslant 2$．

不失一般性，可假定 $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \cdots \geqslant e_n$．设 d_i 是 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 的最大公因子．我们对 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 用归纳法证明 S 包含 d_i 的所有倍数．

当 $i=n$ 时，就是所需要的结果．对于 $i=1$ 与 $i=2$ 的基本情况，可分别利用(iv)和(v)导出．假定对于 $2 \leqslant i < n$，S 包含 d_i 的所有倍数．

设 T 是满足以下条件的整数 m 的集合：m 被 d_i 整除，且对任何整数 r，$m + ra_{i+1} \in S$．则由(v)可知，T 包含非零的正数和负数，即 a_i 的所有倍数．由条件(3)，如果 $t \in T$，且 s 可以被 d_i 整除（于是也属于 S），满足 $t-s \in T$，则 $t+s \in T$．取 $t=s=d_i$，可导出 $2d_i \in T$．

再利用归纳法（类似于(iv)的证明）可得，对任何整数 m（正的、负的或零）有 $2md_i \in T$．

由 a_i 的排列方式可以看出，能整除 d_i 的 2 的最高次幂一定大于或等于能整除 a_{i+1} 的 2 的最高次幂．这也就是说，$\frac{a_{i+1}}{d_{i+1}}$ 是个奇数．因此，可以找到两个整数 f、g，其中 f 是偶

数，使得 $fd_i+ga_{i+1}=d_{i+1}$ *（选择这样一对数，不必对 f 有什么限制．如果需要得到偶数 f，可用 $\left(f-\frac{a_{i+1}}{d_{i+1}},g+\frac{d_i}{d_{i+1}}\right)$ 替代 (f,g)）．于是对任何整数 r，都有 $rfd_i\in T$，故 $rd_{i+1}\in S$．这就完成了归纳，并证明了所需要的结果．

同步检测 4

1．给定集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2000,2001\}$，其中一个子集 T 中任意三个元素 x,y,z 都有 $x+y\neq z$，则 T 中元素最多的有多少个？

2．已知集合 A 中有 10 个元素，且每个元素都是两位整数．证明：一定存在这样两个 A 的子集，它们中没有相同的元素，而它们的元素之和相等．

3．以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：①P 中的元素有正数，有负数；②P 中的元素有奇数，有偶数；③$-1\notin P$；④若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$．试判断实数 0 和 2 与集合 P 的关系．

4．设 S 为满足下列条件的有理数的集合：①若 $a\in S,b\in S$，则 $a+b\in S,ab\in S$；②对任一个有理数 r，三个关系 $r\in S,-r\in S,r=0$ 有且仅有一个成立．证明：S 是由全体正有理数组成的集合．

5．已知一个正整数的子集 A 满足：①A 至少有 3 个元素；②若 $m\in A$，则 m 的所有约数都属于 A；③若 $b、c\in A$，且 $1<b<c$，则 $1+bc\in A$．求证：A 包含所有正整数．

6．设 A 是数集，满足若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，且 $1\notin A$．

(1)若 $2\in A$，则 A 中至少还有几个元素？求出这几个元素．

(2)A 能否为单元素集合？分别在实数集和复数集中进行讨论．

(3)若 $a\in A$，证明：$1-\frac{1}{a}\in A$．

7．已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x)\leqslant 2x^2f\left(\frac{x}{2}\right)$．如果 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}\neq\varnothing$，求证：$A$ 是无限集．

8．设 A 为平面上的一个点集，L 为平面上的一条直线，若 L 过 A 中某个点，则称 L 过 A．

(1)证明可以将平面上的有理点分成 100 个两两不交的无穷集合，使得对平面上任一直线，若其上有两个有理点，则该直线过这 100 个集合中的每个集合；

(2)求最大的整数 r，使得如果将平面上的有理点，按任一方式分成 100 个两两不交的无穷集合，则至少有一条直线过这 100 个集合中的 r 个集合.

9.(波兰数学奥林匹克)证明：任一个有限集的全部子集可以这样的排列顺序，使任何两个邻接的集相差一个元素.

10.(中国数学国家集训队)设 n 个集合 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的元素由非负整数组成. x_i 为 S_i 所有元素之和. 求证：若对某个自然数 k，$1<k<n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i<\frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right],$$

则存在下标 i,j,t,l(至少有三个互不相同)使 $x_i+x_j=x_t+x_l$.

第5讲 集合的基本划分

知识点金

集合的划分反映了集合与子集之间的关系，这既是一类数学问题，也是数学中的解题策略——分类思想的基础，在近几年来的数学竞赛中经常出现，日益受到重视．本讲主要介绍有关的概念、结论以及处理集合、子集与划分问题的方法．

1．覆盖

若把一个集合 A 分成若干个叫做分块的非空子集，使得 A 中的每个元素至少属于一个分块，这些分块的全体叫做 A 的一个覆盖．即：设 A 为非空集合，$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$，其中 $S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,m)$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i=A$，则集合 S 称作集合 A 的覆盖．

2．划分

给定集合 A 的一个覆盖 S，若 A 中的每一个元素属于且仅属于 S 的一个分块，那么 S 称作是 A 的一个划分．即：若 S 是集合 A 的覆盖，且满足 $S_i\cap S_j=\varnothing$，这里 $(i\neq j)$，则称 S 是 A 的划分．

3．抽屉原则

抽屉原则的常见形式如下：

(1)把 $n+k(k\geqslant1)$ 个物体以任意方式全部放入 n 个抽屉中，一定存在一个抽屉中至少有两个物体．

(2)把 $mn+k(k\geqslant1)$ 个物体以任意方式全部放入 n 个抽屉中，一定存在一个抽屉中至少有 $m+1$ 个物体．

(3)$m_1+m_2+\cdots+m_n+k(k\geqslant1)$ 个物体以任意方式全部放入 n 个抽屉中，那么存在

一个抽屉里至少放入了 m_1+1 个物体，或在第二个抽屉里至少放入了 m_2+1 个物体，…，或在第 n 个抽屉里至少放入了 m_n+1 个物体.

(4)把 m 个物体以任意方式全部放入 n 个抽屉中，有两种情况：①当 $n|m$ 时($n|m$ 表示 n 整除 m)，一定存在一个抽屉中至少放入了 $\frac{m}{n}$ 个物体；②当 n 不能整除 m 时，一定存在一个抽屉中至少放入了 $\left[\frac{m}{n}\right]+1$ 个物体($[x]$表示不超过 x 的最大整数).

(5)把无穷多个元素分成有限类，则至少有一类包含无穷多个元素.

4. 容斥原理基本形式

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|$$

其中$|A|$表示集合 A 中元素的个数.

5. 极端原理

最小数原理一：设 M 是自然数集的一个非空子集，则 M 中必有最小数.

最小数原理二：设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最小数.

上面的最小数原理又称为极端原理.

例题精析

例 1 设 S 为集合$\{1,2,3,\cdots,50\}$的一个子集，且 S 中任意两个元素之和不能被 7 整除，则 S 中元素最多有多少个?

分析 我们注意“7”，构造抽屉.

解 将这 50 个数按照 7 的余数划分成 7 个集合：

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$

除去 A_0 中的 7 个元素外，其余集合中的元素都不能被 7 整除，而且其余六个集合的每一个集合中任意两个元素之和也不能被 7 整除．但是在 A_1 和 A_6、A_2 和 A_5、A_3 和 A_4

中如果各取一个元素的话，这两个元素之和能够被 7 整除．因此，所求集合中的元素可以这样构成：A_0 中取一个，然后在 A_1 和 A_6、A_2 和 A_5、A_3 和 A_4 每一组的两个集合中取一个集合中的所有元素，为了"最多"，必须取 A_1 中的 8 个，然后可以取 A_2、A_3 中各 7 个元素，因此 S 中元素最多有 $1+8+7+7=23$ 个．

评注 注意抽屉原理在集合中的应用．

例 2 已知集合 $X=\{1,2,\cdots,k\}$，对 $A\subseteq X$，将 A 中所有元素的和记为 $S(A)$．将 X 分为互不相交的两个子集 A,B，且 $A\cup B=X$．若 $S(A)=2S(B)$，求 k 的所有值．

解 因 $A\cup B=X$，$A\cap B=\varnothing$，且 $S(A)=2S(B)$，

故 $S(X)=3S(A)=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 是 3 的倍数．

即 $3\mid k$ 或 $3\mid(k+1)$．

(1) 当 $k=3m$ 时，令 $A=\{1,3,4,6,\cdots,3m-2,3m\}$，$B=\{2,5,\cdots,3m-1\}$，则 A,B 满足要求．

(2) 当 $k=3m-1$ 时，令 $A=\{2,3,5,6,8,\cdots,3m-3,3m-1\}$，$B=\{1,4,7,\cdots,3m-2\}$，则 A,B 满足要求．

因此，$k=3m$ 或 $k=3m-1(m=1,2,\cdots)$．

例 3 （全国女子数学奥林匹克）求出所有的正实数 a，使得存在正整数 n 及 n 个互不相交的无限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\mathbf{Z}$，而且对于每个 A_i 中的任意两数 $b>c$，都有 $b-c\geqslant a^i$．

分析 我们寻找最熟悉的模型，发现把整数按奇数和偶数分类，再将偶数集按照除以 2 以后的奇偶性分类，依此可以类推．这虽然要分无限类才能满足条件，但却给我们提供了有用的信息：2 是不是分界线呢？数学竞赛中考虑特殊情形及猜想都是很重要和常用的手段．

解 若 $0<a<2$，n 充分大时，$2^{n-1}>a^n$，令

$A_i=\{2^{i-1}m\mid m$ 为奇数$\}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，

$A_n=\{2^{n-1}$ 的倍数$\}$，则该分拆满足要求．

若 $a\geqslant 2$，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足要求，令 $M=\{1,2,\cdots,2^n\}$，下证 $|A_i\cap M|\leqslant 2^{n-i}$．

设 $A_i\cap M=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$x_1<x_2<\cdots<x_m$，则

$2^n>x_m-x_1=(x_m-x_{m-1})+(x_{m-1}-x_{m-2})+\cdots+(x_2-x_1)\geqslant(m-1)2^i$．

所以 $m-1<2^{n-i}$，即 $m<2^{n-i}+1$，故 $m\leqslant 2^{n-i}$．

$A_i\cap M$，$i=1,2,\cdots,n$ 为 M 的一个分拆，故

$$2^n=|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap M|\leqslant\sum_{i=1}^{n}2^{n-i}=2^n-1,$$ 矛盾．

所以，所求的 a 为所有小于 2 的正实数．

例 4 设 k 是整数，$M_k=\{m|2k^2+k\leqslant m\leqslant 2k^2+3k,m\in\mathbf{Z}\}$ 是否可能把 M_k 分成两个子集 A 和 B，使得 $\sum\limits_{x\in A}x^2=\sum\limits_{x\in B}x^2$.

分析 我们取 $k=1,M_1=\{3,4,5\}$，易得 $3^2+4^2=5^2,k=2,M_2=\{10,11,12,13,14\}$，验证发现 $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$，我们利用特殊情形来寻找规律，进而突破题目.

解 设 $A=\{(2k^2+k),(2k^2+k)+1,\cdots,(2k^2+k)+k\}$

$B=\{(2k^2+k)+k+1,(2k^2+k)+k+2,\cdots,(2k^2+k)+2k\}$，令 $u=2k^2+k$，

所以 $\sum\limits_{x\in B}x^2-\sum\limits_{x\in A}x^2$

$=(u+1+k)^2+(u+2+k)^2+\cdots+(u+k+k)^2-[u^2+(u+1)^2+\cdots+(u+k)^2]$

$=k\cdot k^2+2k(u+1)+2k(u+2)+\cdots+2k(u+k)-u^2$

$=k^3+2k\cdot\dfrac{2u+k+1}{2}\cdot k-u^2$

$=k^3+k^2[2(2k^2+k)+k+1]-(2k^2+k)^2$

$=k^3+4k^4+3k^3+k^2-4k^4-4k^3-k^2$

$=0$，

所以 $\sum\limits_{x\in A}x^2=\sum\limits_{x\in B}x^2$.

例 5 （国际数学奥林匹克）试将集合$\{1,2,\cdots,1989\}$分为 117 个互不相交的子集 A_i $(i=1,2,\cdots,117)$，使得：

(1)每个 A_i 都含有 17 个元素；

(2)所有 A_i 中各元素之和都相同.

分析 因为 $1989=117\times17$，故可将$\{1,2,\cdots,1989\}$顺次分成 17 段，每段含 117 个数. 显然，只要把每段的 117 个数适当地分别放入 $A_1,A_2,\cdots,A_{117}$ 中以使条件(2)满足，问题就解决了.

解 将集合$\{1,2,\cdots,1989\}$中的数从小到大顺次分成 17 段，每段含 117 个数.

从第 4 段数开始，将偶数段的数从小到大依次放入 $A_1,A_2,\cdots,A_{117}$ 中，并将奇数段的数从小到大依次放入这 117 个子集中. 易见，所有集合中的 14 个数之和都相等. 于是问题归结为如何将前三段数$\{1,2,\cdots,351\}$每 3 个一组分别放入每个集中，且使每组 3 数之和都相等.

把这些数中 3 的倍数抽出来从小到大排好：$\{351,348,345,\cdots,6,3\}$，共 117 个数，依次放入 $A_1,A_2,\cdots,A_{117}$ 中；其余的 234 个数从小到大排列并分成两段，每段 117 个数，即$\{1,2,4,5,7,\cdots,173,175\}$和$\{176,178,179,\cdots,349,350\}$. 将这两段数分别顺次放入 A_1，$A_2,\cdots,A_{117}$ 之中便满足要求. 事实上，若将这两段数中的数顺次相加，则其和为$\{177,180,183,186,\cdots,522,525\}$. 由此可见，放入每个 A_i 的 3 数之和都是 528.

评注 上述解法是通过具体构造 $A_i(i=1,2,\cdots,117)$ 完成的. 由此不难看出，这种构造方式不是唯一的，有兴趣者不妨一试.

例6 设 $S=\{1,2,3,\cdots,280\}$. 求最小的自然数 n 使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数.

分析与解 设 $A_1=\{S$ 中被 2 整除的数$\}$，$A_2=\{S$ 中被 3 整除的数$\}$，$A_3=\{S$ 中被 5 整除的数$\}$，$A_4=\{S$ 中被 7 整除的数$\}$，并记 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$，易得 $|A|=216$.

由于在 A 中任取 5 个数，必有两个数在同一个 A_i 中，且不互素，故 $n\geqslant 217$.

另一方面，设 $B_1=\{1$ 和 S 中的一切素数$\}$，$B_2=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2\}$，$B_3=\{2\times131,3\times89,5\times53,7\times37,11\times23,13\times19\}$，$B_4=\{2\times127,3\times83,5\times47,7\times31,11\times19,13\times17\}$，$B_5=\{2\times113,3\times79,5\times43,7\times29,11\times17\}$，$B_6=\{2\times109,3\times73,5\times41,7\times23,11\times13\}$.

记 $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_6$，则 $|B|=88$. 于是，S/B 含有 192 个元素. 在 S 中任取 217 个数，由于 $217-192=25$，故必有 25 个元素在 B 中. 于是必有 5 个数属于同一 B_i，显然它们两两互素.

故 n 的最小值为 217.

例7 （中国数学奥林匹克）设 X 是一个 56 元集合. 求最小的正整数 n，使得对 X 的任意 15 个子集，只要它们中任何 7 个的并的元素个数都不少于 n，则这 15 个子集中一定存在 3 个，它们的交非空.

解 n 的最小值为 41.

首先证明 $n=41$ 合乎条件. 用反证法. 假定存在 X 的 15 个子集，它们中任何 7 个的并不少于 41 个元素，而任何 3 个的交都为空集. 因每个元素至多属于 2 个子集，不妨设每个元素恰好属于 2 个子集（否则在一些子集中添加一些元素，上述条件仍然成立），由抽屉原理，必有一个子集，设为 A，至少含有 $\left[\frac{2\times56}{15}\right]+1=8$ 个元素，又设其他 14 个子集为 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$. 考察不含 A 的任何 7 个子集，都对应 X 中的 41 个元素，所有不含 A 的 7-子集组一共至少对应 $41C_{14}^7$ 个元素. 另一方面，对于元素 a，若 $a\notin A$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$ 中有 2 个含有 a，于是 a 被计算了 $C_{14}^7-C_{12}^7$ 次；若 $a\in A$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$ 中有一个含有 a，于是 a 被计算了 $C_{14}^7-C_{13}^7$ 次，于是

$$\begin{aligned}41C_{14}^7&\leqslant(56-|A|)(C_{14}^7-C_{12}^7)+|A|(C_{14}^7-C_{13}^7)\\&=56(C_{14}^7-C_{12}^7)-|A|(C_{13}^7-C_{12}^7)\\&\leqslant56(C_{14}^7-C_{12}^7)-8(C_{13}^7-C_{12}^7).\end{aligned}$$

由此可得 $196\leqslant195$，矛盾.

其次证明 $n\geqslant41$. 用反证法.

假定 $n\leqslant 40$，设 $X=\{1,2,\cdots,56\}$，令

$A_i=\{i,i+7,i+14,i+21,i+28,i+35,i+42,i+49\}$，$i=1,2,\cdots,7$，

$B_j=\{i,j+8,j+16,j+24,j+32,j+40,j+48\}$，$j=1,2,\cdots,8$.

显然，$|A_i|=8(i=1,2,\cdots,7)$，

$|A_i\cap A_j|=0(1\leqslant i<j\leqslant 7)$，

$|B_j|=7(j=1,2,\cdots,8)$，

$|B_i\cap B_j|=0(1\leqslant i<j\leqslant 8)$，

于是，对其中任何 3 个子集，必有 2 个同时为 A_i，或者同时为 $|B_j|$，其交为空集.

对其中任何 7 个子集 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s},B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_t}(s+t=7)$，有

$$\begin{aligned}&|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_s}\cup B_{j_1}\cup B_{j_2}\cup\cdots\cup B_{j_t}|\\&=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_s}|+|B_{j_1}|+|B_{j_2}|+\cdots+|B_{j_t}|-st\\&=8s+7t-st\\&=8s+7(7-s)-s(7-s)\\&=(s-3)^2+40\geqslant 40.\end{aligned}$$

任何 3 个子集的交为空集，所以 $n\geqslant 41$.

综上所述，n 的最小值为 41.

思考交流

思考题（中国数学国家集训队）设 k 是正整数，证明：可以将集合 $\{0,1,2,3,\cdots,2^{k+1}-1\}$ 分成两个没有公共元素的子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k}\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k}\}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^m=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^m$ 对任何 $m\in\{1,2,\cdots,k\}$ 都成立.

证　对 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时，令 $x_1=0,x_2=3,y_1=1,y_2=2$ 即可，故 $k=1$ 时命题成立.

假设命题在 $\leqslant k$ 时成立. 考虑 $k+1$ 时情况.

由归纳假设知，$\{0,1,2,\cdots,2^{k+1}-1\}$ 可以被分成满足条件的两个子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k}\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k}\}$，则

$$\begin{aligned}&\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k},2^{k+1}+y_1,2^{k+1}+y_2,\cdots,2^{k+1}+y_{2^k}\}\\&\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k},2^{k+1}+x_1,2^{k+1}+x_2,\cdots,2^{k+1}+x_{2^k}\}=\{0,1,2,\cdots,2^{k+2}-1\},\end{aligned}$$

且这两个集合没有公共元素.

下面证明：对 $m=1,2,\cdots,k+1$，有

$$\sum_{i=1}^{2^k} x_i^m + \sum_{i=1}^{2^k} (2^{k+1}+y_i)^m = \sum_{i=1}^{2^k} y_i^m + \sum_{i=1}^{2^k} (2^{k+1}+x_i)^m. \qquad (*)$$

事实上，

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^k} x_i^m + \sum_{i=1}^{2^k} y_i^m + \sum_{t=0}^{m-1} C_m^t (2^{k+1})^{m-t} \sum_{i=1}^{2^k} y_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{2^k} y_i^m + \sum_{i=1}^{2^k} x_i^m + \sum_{t=0}^{m-1} C_m^t (2^{k+1})^{m-t} \sum_{i=1}^{2^k} x_i^t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{m-1} C_m^t (2^{k+1})^{m-t} \sum_{i=1}^{2^k} (x_i^t - y_i^t) = 0.$$

由归纳假设对 $t=1,2,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{2^k} (x_i^t - y_i^t) = 0.$$

故$(*)$成立. 进而命题在 $k+1$ 时成立.

同步检测 5

1. 设 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 15$，A,B 都是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 真子集，$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 证明：$A$ 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

2. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 均为实数. 试证：存在集合 $S\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$1\leqslant |S\cap\{i,i+1,i+2\}|\leqslant 2, 1\leqslant i\leqslant n-2$ 且 $\left|\sum_{i\in S} r_i\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} |r_i|$ 成立.

3.（全国女子数学奥林匹克）设 m,n 是整数，$m>n\geqslant 2$，$S=\{1,2,\cdots,m\}$，$T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 S 的一个子集. 已知 T 中的任两个数都不能同时整除 S 中的任何一个数，求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{m+n}{m}$.

4.（新西兰数学竞赛）将数集 $\{1,2,\cdots,10\}$ 分成两组，使得第一组的数的乘积 p_1 能被第二组的乘积 p_2 整除，求 $\frac{p_1}{p_2}$ 的最小值.

5. 试问，可有多少种方式将数集 $\{2^0,2^1,2^2,\cdots,2^{2005}\}$ 分为两个不相交的非空子集 A 和 B，使得方程 $x^2-S(A)x+S(B)=0$ 有整数根，其中 $S(M)$ 表示数集 M 中所有元素的和.

6. 设 $A=\{1,2,\cdots,2002\}$，$M=\{1001,2003,3005\}$. 对 A 的任一非空子集 B，当 B 中任意两数之和不属于 M 时，称 B 为 M——自由集. 如果 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，且 A_1,A_2 均为 M——自由集，那么称有序对 (A_1,A_2) 为 A 的一个 M——划分. 试求 A 的所有 M——划分的个数.

7.（中国西部数学奥林匹克）我们称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个 n 分划，如果

(1) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$；

(2) $A_i\cap A_j\neq\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

求最小正整数 m，使得对 $A=\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意一个 14 分划 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，一定存在某个集合 $A_i(1<i<14)$，在 A_i 中有两个元素 a、b 满足 $b<a\leqslant\frac{4}{3}b$.

8.（中国西部数学奥林匹克）设 n 为正整数，集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $n+1$ 个非空子集. 证明：存在 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$，使得 $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}$.

9. 平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点，证明平面上的全体有理点可分为三个两两不相交的集合，满足条件：

(1) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含这三个集合中每个集合的点；

(2) 在任意一条直线上不可能有三个点分别属于这三个集合.

用记号 (x,y)，(x,y,z) 表示坐标或向量，$(x,y,z)_D$ 表示诸整数的最大公约数，Q^2 表示平面上的有理点集.

10.（德国数学竞赛）已知 p,q 是互质的正整数，且 $p\neq q$. 将正整数集分成三个子集 A,B,C，使得对于每个正整数 z，这三个子集中的每一个恰各包含 $z,z+p,z+q$ 这三个整数之一. 证明：存在这样的分拆，当且仅当 $p+q$ 能被 3 整除.

第6讲 集合的应用

知识点金

数学竞赛中的集合问题常与代数、数论、组合等交织在一起，如集合的划分与整数的分拆是联系非常紧密的的两类问题. 在国内外各级数学竞赛中，集合与其他知识结合的问题经常出现，都是数学竞赛中比较灵活的问题，很难有统一的解法，因而需要扎实的数学功底，要善于抓住问题的本质和关键.

例题精析

例 1 设集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$.

$N=\{u|u=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 试证：$M=N$.

分析 两个集合都是无限集，我们试利用“若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 则 $A=B$”证明.

解 对 N 中任一元素 u，有

$$u=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5)p\in M\text{，从而，}N\subseteq M.$$

另一方面，对 M 中任一元素 u，有

$$u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N\text{，从而，}M\subseteq N.$$

综上所述，$M=N$.

例 2 设集合 $A=\{1,2,\cdots,366\}$. 如果 A 的一个二元子集 $B=\{a,b\}$ 满足 $17|(a+b)$，则称 B 具有性质 P.

(1)求 A 的具有性质 P 的二元子集的个数；

(2)A 的一组二元子集，两两不相交且具有性质 P，这组二元子集的个数是多少？

分析 根据题目信息，我们利用除 17 的余数对集合划分.

解 (1)把 $1,2,\cdots,366$ 按被 17 除的余数分为 17 类：$[0],[1],\cdots,[16]$(其中$[i]$表示除以 17 后余数为 i 的一类). 因为 $366=17\times21+9$，故$[1],[2],\cdots,[9]$中各有 22 个数；$[10],[11],\cdots,[16]$和$[0]$ 中各有 21 个数.

①当 $a,b\in[0]$时，具有性质 P 的子集数为 $C_{21}^2=210$ 个；

②当 $a\in[k],b\in[17-k],k=1,2,\cdots,7$ 时，具有性质 P 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{21}^1=462$ 个；

③当 $a\in[8],b\in[9]$时，具有性质 p 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{22}^1=484$ 个.

所以，A 的具有性质 P 的子集数共有 $210+462\times7+484=3928$ 个.

(2)为了使二元子集不相交，当 $a、b\in[0]$时，可搭配出 10 个子集；

当 $a\in[k],b\in[17-k],k=1,2,\cdots,7$ 时，各可搭配出 21 个子集；

当 $a\in[8],b\in[9]$时，可搭配出 22 个子集.

因此，具有性质 P 的两两不相交的子集共有 $10+21\times7+22=179$ 个.

例 3 已知集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. 求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有两个元素，且每个子集中任意两个元素之差的绝对值大于 1.

解 设 a_n 为集合$\{1,2,\cdots,n\}$的具有题设性质的子集个数，则$\{1,2,\cdots,k,k+1,k+2\}$的具有题设性质的子集可分为两类，第一类子集中不含有 $k+2$，这类子集有 a_{k+1} 个；第二类子集中含有 $k+2$，这类子集或为$\{1,2,\cdots,k\}$的相应子集与$\{k+2\}$的并，或为$\{1,2,\cdots,k\}$的单元子集与$\{k+2\}$的并，共有 a_k+k 个.

于是，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k+k$.

显然，$a_3=1,a_4=3$.

从而，$a_5=7,a_6=14,a_7=26,a_8=46,a_9=79,a_{10}=133$.

评注 建立递推关系是组合计数中的一种重要方法，我们也可以分类讨论并利用插空法解决问题：$C_9^2+C_8^3+C_7^4+C_6^5=133$，那么，对于一般的情况$\{1,2,\cdots,n\}$如何用分类讨论及插空法解决呢？两种方法的表达形式不同，其内在又有什么关系呢？请读者自己思考.

例 4 (加拿大数学竞赛)设集合 T 为 2004^{100} 的所有正约数的集合，求集合 T 的子集 S 中的元素个数的最大可能值，其中 S 的元素没有一个是另一个的倍数.

分析 一个数是另一个数的倍数，则在标准分解式中，其每个素因子的幂指数不小于另一个数相应的素因子的幂指数，因而我们将 2004 标准分解后寻求思路.

解 设 a,b,c 是非负整数，由于 $2004=2^2\cdot3\cdot167$，令

$T=\{2^a3^b167^c\mid0\leqslant a\leqslant200,0\leqslant b,c\leqslant100\}$，$S=\{2^{200-b-c}3^b167^c\mid0\leqslant b,c\leqslant100\}$

显然 S 为 T 的一个子集，由于 b,c 对各有 101 种可能值，所以 S 中共有 $101^2=10201$ 个元素.

首先，我们证明 S 满足条件，若某个元素 $2^{100-b-c}3^b167^c$ 是另一个元素 $2^{100-i-j}3^i167^j$ 的倍数，则

$$\begin{cases}200-b-c\geqslant 200-i-j\\ b\geqslant i\\ c\geqslant j\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=i\\ c=j\end{cases}，矛盾.$$

所以 S 满足条件.

其次，我们证明元素个数最多为 10201. 若集合 U 是集合 T 的子集，元素个数超过 $101^2=10201$，则 (b,c) 对最多有 $101^2=10201$ 对，必存在某两个元素 $2^i3^b167^c$ 和 $2^j3^b167^c$，其中一个为另一个的倍数，则 U 不满足条件.

例 5 （全国高中数学联赛）设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和称为 X 的“容量”（规定空集的容量为 0），若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.

（1）求证 S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

（2）求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和. 并求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

证明 （1）设 S 为 S_n 的奇子集，令

$$T=\begin{cases}S\cup\{1\}，若\ 1\notin S\\ S/\{1\}，若\ 1\in S\end{cases}$$

则 T 是偶子集，$S\to T$ 是奇子集的集到偶子集的一一对应，而且每个偶子集 T，均恰有一个奇子集

$$S=\begin{cases}T\cup\{1\}，若\ 1\notin T\\ T/\{1\}，若\ 1\in T\end{cases}$$

与之对应，所以结论成立.

（2）对任一 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，含 i 的子集共 2^{n-1} 个，用上面的对于方法可知在 $i\neq 1$ 时，这 2^{n-1} 个集中有一半是奇子集. 在 $i=1$ 时，由于 $n\geqslant 3$ 将上边的 1 换成 3，同样可得其中有一半是奇子集. 于是在计算奇子集容量之和时，元素 i 的贡献是 $2^{n-2}\cdot i$. 奇子集容量之和是

$$\sum_{i=1}^{n}2^{n-2}i=n(n+1)\cdot 2^{n-3}$$

根据上面所说，这也是偶子集容量之和，两者相等.

评注 建立一一映射是解决计数问题的重要方法之一，本题因此而简化了运算.

例 6 $n\in\mathbf{N}^*$，集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$\{x_1x_2\cdots x_n\}$中若有$|x_i-x_{i+1}|=n(i\in\{1,2,\cdots,2n-1\})$，则这一排列具有性质 P. 证明：有性质 P 的比没性质 P 的多.

证明 记 S_k 为 k 与 $k+n$ 相邻的排列的集合. 则 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n}S_k$ 是有性质 P 的集合.

则由容斥原理

$$|S|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|S_k|-\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}|S_k\cap S_l|,$$

又 $$|S_k|=2\cdot(2n-1)!,|S_k\cap S_l|=2^2\cdot(2n-2)!.$$

所以，$|S|\geqslant n\cdot 2(2n-1)!-C_n^2\cdot 2^2\cdot(2n-2)!$

$$=(2n)!-\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^2(2n-2)!>\frac{1}{2}\cdot(2n)!$$

即 S 中元素超过总排列的一半.

所以，具有性质 P 的比不具有性质 P 的多.

评注 本题也可以利用建立映射解决，请读者思考.

例 7 设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$. 若 S 中任意 n 个两两互质的数组成的集合中都至少有一个质数，试求 n 的最小值.

解 首先，我们有 $n\geqslant16$. 事实上，取集合 $A_0=\{1,2^2,3^2,5^2,\cdots,41^2,43^2\}$，则 $A_0\subseteq S$，$|A_0|=15$，A_0 中任意两数互质，但其中无质数，这表明 $n\geqslant16$.

其次，我们证明：对任意 $A\subseteq S,n=|A|=16$，A 中任两数互质，则 A 中必存在一个质数.

利用反证法，假设 A 中无质数. 记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{16}\}$，分两种情况讨论.

(1) 若 $1\notin A$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{16}$ 均为合数，

又因为$(a_i,a_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant16)$，

所以 a_i 与 a_j 的质因数均不相同，

设 a_i 的最小质因数为 p_i，不妨设 $p_1<p_2<\cdots<p_{16}$，

则 $a_1\geqslant p_1^2\geqslant2^2,a_2\geqslant p_2^2\geqslant3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant47^2>2005$，矛盾.

(2)若 $1\in A$，则不妨设 $a_{16}=1$，$a_1,\cdots,a_{15}$ 均为合数，同(1)所设，

同理有 $a_1\geqslant p_1^2\geqslant2^2,a_2\geqslant p_2^2\geqslant3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant47^2>2005$，矛盾.

由(1)，(2)知，反设不成立，从而 A 中必有质数，即 $n=|A|=16$ 时结论成立.

综上，所求的 n 最小值为 16.

例 8 （英国数学竞赛）让 T 是在同一平面上的 2005 个点的集合. 这些点没有三点共线. 对于这 2005 个点的任一点，该点位于一些三个顶点都是由 T 内的点构成的三角形的内部. 证明这些三角形的数目是偶数.

分析 华罗庚说“要善于退，足够的退，退到最原始而又不是重要性的地方是学好数

学的一个诀窍",我们将 2005 换成较小的数 5 进行探索,发现任取一点,则另外四点不论是凸四边形还是凹四边形的四个顶点,其构成的四个三角形总有 2 个或 0 个包含该点,如何将规律拓广或利用该规律呢?

证明 任取一点,不妨设为 A,则还剩下 2004 个点.

首先,任取 2004 个点中的 4 个点,则这 4 个点不论是凸四边形还是凹四边形的四个顶点,它们构成 4 个三角形.

易验证这 4 个三角形中有 2 个或者没有三角形包含点 A,则这个四边形中有偶数个三角形包含点 A,所有的四边形中的三角形也包含偶数个三角形,而每个包含 A 点的三角形被重复计算 2001 次.

因而得到的总数要除以 2001,而 2001 为奇数,所以结果还是偶数,结论成立.

例 9 (国际数学奥林匹克)已知正整数 a 和 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2,求证 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方.

证明 令 $A=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{N}^*,a\geqslant b,(ab+1)\mid(a^2+b^2)\}$. 本题的结论是:对所有 $(a,b)\in A$,都有

$$f(a,b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k^2(k\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

记 $B=\{(a,b)\mid(a,b)\in A$,且 $f(a,b)\neq k^2,k\in\mathbf{N}^*\}$. 我们只需证明 $B=\varnothing$.

若 $B=\varnothing$,则不妨设 B 中使 $a+b$ 最小的正整数对为 (a,b). 令

$$f(a,b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=t(\neq k^2),$$

则有

$$a^2-tba+b^2-t=0. \quad ②$$

把②看作是关于 a 的二次方程,显然 a 是方程②的一个根,设 c 为②的另一根,则由韦达定理有

$$a+c=tb, \quad ③$$

$$ac=b^2-t. \quad ④$$

由③知 c 是整数,由④知 $c\neq 0$.

若 $c<0$,则由 $t>0,b>0$ 知

$$-tcb-t\geqslant 0.$$

由 c 是②的根得

$$c^2-tcb+b^2-t=0, \quad ⑤$$

于是 $c^2+b^2=tcb+t\leqslant 0$. 出现矛盾.

因而 $c>0$. 由④知

$$0<ac=b^2-t<b^2\leqslant a^2,$$

所以 $0<c<a$. 由⑤得

$$t=\frac{c^2+b^2}{cb+1},$$

于是 (b,c) 或 $(c,b)\in B$. 但此时

$$b+c<a+b$$

与 (a,b) 的选择即 $a+b$ 最小矛盾.

所以 $B=\varnothing$, 从而命题得证.

评注 该题利用集合语言及极端原理巧妙解决，该解法也被评为当前的最佳解法.

思考交流

思考题（亚太地区数学竞赛） 平面上有 2004 个点，并且无三点共线，S 为通过任何两点直线的集合. 证明：这些点可以被染成两种颜色，使得两点同色当且仅当 S 中有奇数条直线分离这两点.

证明 用 d_{XY} 表示分离点 X 和 Y 的直线的条数. 我们取定一点 A，将其染成蓝色. 然后对于其他的点，如果分离该点和 A 点的直线的条数为奇数，则把该点染成蓝色，否则染成红色.

我们只要证明任取 A 点以外的两点 B、C 满足条件即可，我们只要证明 $d_{AB}+d_{BC}+d_{CA}$ 为奇数即可.

因为若 B、C 同色，则 d_{AB}、d_{CA} 奇偶性相同，所以 d_{BC} 为奇数；若 B、C 不同色，则 d_{AB}、d_{CA} 奇偶性相反，所以 d_{BC} 为偶数.

而对于三角形 ABC，我们只要考虑通过它的内部的直线. 显然直线最多与两条边相交，这样的直线不影响 $d_{AB}+d_{BC}+d_{CA}$ 的奇偶性.

我们只考虑与三角形 ABC 一条边相交的直线，不妨先考虑通过点 A 和边 BC 相交的直线的条数.

将三角形 ABC 的三条边延长为直线，则将平面分为 7 个区域，设三角形 ABC 内部含有 n_1 个点，其他 6 个区域分别含有 $n_2, n_3, \cdots, n_7$ 的点，则通过点 A 和边 BC 相交的直线的条数为三角形 ABC 内部及与其相邻边为 BC 的区域及与其在 A 点形成对顶角的区域的所有点的个数；

对于点 B 和边 AC、点 C 和边 AB 情况类似.

则这样的直线条数为

$$3n_1+n_2+n_3+\cdots+n_7\equiv n_1+n_2+n_3+\cdots+n_7=2004-3\equiv1 \pmod 2$$

所以 $d_{AB}+d_{BC}+d_{CA}$ 为奇数，命题成立.

同步检测 6

1. 集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，满足下列条件(1)、(2)的 A 到 A 上的映射 f 有几个？

(1) $i,j\in A, i\neq j$，则 $f(i)\neq f(j)$；

(2) $i,j\in A, i+j=7$，则 $f(i)+f(j)=7$.

2. (巴尔干地区数学奥林匹克)对有限集合 A，存在函数 $f:N\to A$ 具有下述性质：若 $|i-j|$ 是素数，则 $f(i)\neq f(j)$，$N=\{1,2,\cdots\}$. 求有限集合 A 的元素的最少个数.

3. (斯洛文尼亚数学竞赛)在集合 A 中，有 7 个不大于 20 的正整数. 证明：在 A 中一定存在 4 个不同的数 a,b,c,d，使得 $a+b-c-d$ 能被 20 整除.

4. 设集合 $M=\{1,2,\cdots,10\}$ 的五元子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 满足条件：M 中的任意两个元素最多在两个子集 A_i 与 $A_j(i\neq j)$ 内出现，求 k 的最大值.

5. (全国女子数学竞赛)对于任意正整数 n，记 n 的所有正约数组成的集合为 S_n. 证明：S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

6. (白俄罗斯数学竞赛)设集合 $A,B\subset\mathbf{R}$，对任意的 $\alpha>0$，有 $A\subseteq B+\alpha Z$，$B\subseteq A+\alpha Z$. (1) $A=B$ 是否一定成立. (2)若 B 是有界集合，(1)是否成立.

注：$X+\alpha Z=\{x+\alpha n \mid x\in X, n\in\mathbf{Z}\}$

7. (美国数学奥林匹克)确定(并证明)是否有整数集的子集 X 具有下面的性质：对任意整数 n，恰有一组 $a,b\in X$，使 $a+2b=n$.

8. (国际数学奥林匹克)对于任何正整数 k，$f(k)$ 表示集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的个数.

(a)求证：对于每个正整数 m，至少存在一个正整数 k，使得 $f(k)=m$.

(b)确定所有正整数 m，对每一个 m，恰存在一个 k 满足 $f(k)=m$.

9. (保加利亚冬季数学竞赛)设 A 是集合 $\{1,2,3,\cdots,16\}$ 的一个 k 元子集，且 A 的任意两个子集的元素之和互不相等. 而对于集合 $\{1,2,3,\cdots,16\}$ 的包含集合 A 的任意 $k+1$ 元子集 B，则存在 B 的两个子集，它们的元素之和相等.

(1)证明：$k\leqslant 5$；

(2)求集合 A 的元素之和的最大值和最小值.

10. 设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$. 若 S 中任意 n 个两两互质的数组成的集合中都至少有一

个质数，试求 n 的最小值.

11.（中国数学奥林匹克）设 $S=\{1,2,3,\cdots,98\}$，求最小自然数 n，使得 S 的任何一个 n 元子集中都可以选出 10 个数，无论怎样将这 10 个数均分成两组，总有一组中存在一个数与另外四个数都互质，而另一组中总有一个数与另外四个数都不互质.

12. 设 S 为集合 $\{1,2,\cdots,108\}$ 的一个非空子集，满足：(i) 对 S 中任意的数 a，b，总存在 S 中数 c，使得 $(a,c)=(b,c)=1$；(ii) 对 S 中任意的数 a，b，总存在 S 中数 c'，使得 $(a,c')>1$，$(b,c')=1$. 求 S 中元素个数的最大可能值.

参考答案

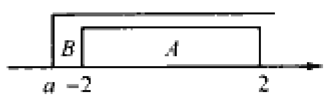
第 1 讲　集合的基本概念

1. D　2. B　3. C　4. A　5. B　6. B

7. $\{1,2,5\}$

8. $a \leqslant -2$

解析　因为 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$，$B=\{x \mid x \geqslant a\}$，又 $A \subseteq B$，利用数轴上覆盖关系：如图(第 8 题)



第 8 题

因此有 $a \leqslant -2$.

评注　本题主要考查集合的概念和集合的关系.

9. 解析　因为 $g(x) \geqslant 0$ 的解集为 Q，所以 $g(x)<0$ 的解集为 $\complement_I Q$，因此 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集为 $P \cap \complement_I Q$.

评注　本题以不等式为载体，重点考查集合的补集、交集的概念及其运算，活而不难.

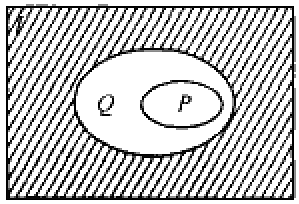
10. $P \cap \complement_I Q$

解析　阴影部分为 $\complement_I Q$(如图(第 10 题)

显然，所求表达式为 $\complement_I Q \cap P=\varnothing$，或 $\complement_I Q \cap (Q \cap P)$ 或 $\complement_I Q \cap (Q \cup P)=\varnothing$.

评注　本题考查集合的关系及运算.

11. 解　$A=\{(x,y) \mid y=2x+1, x \neq 1\}$，即 A 集合为直线 $y=2x+1$ 上除去点 $(1,3)$ 的点的集合，故当 $-\dfrac{4}{a}=2$，即 $a=-2$ 时，B 集合表示一条与 $y=2x+1$ 平行的直线，此时



第 10 题

$A\cap B=\varnothing$；又$(1,3)\in A$，故当$(1,3)\in B$时，$A\cap B=\varnothing$，即$1\times4+3a-16=0$，所以$a=4$.

综上，a的取值为-2或4.

12. 答案　2560

13. 解　设解出甲、乙、丙三题的学生的集合分别为A、B、C，并用三个圆表示之，则重叠部分表示同时解出两题或三题的学生的集合，其人数分别以a,b,c,d,e,f,g表示.

由于每个学生至少解出一题，故

$$a+b+c+d+e+f+g=25 \quad ①$$

由于没有解出甲题的学生中，解出乙题的人数是解出丙题的人数的2倍，故

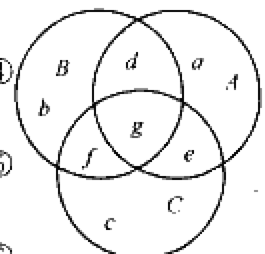
$$b+f=2(c+f) \quad ②$$

由于只解出甲题的学生比余下的学生中解出甲题的学生的人数多1，故

$$a=d+e+g+1 \quad ③$$

由于只解出一题的学生中，有一半没有解出甲题，故

$$a=b+c \quad ④$$



由②得：

$$b=2c+f,f=b-2c \quad ⑤$$

以⑤代入①消去f得

$$a+2b-c+d+e+g=25 \quad ⑥$$

以③④代入⑥得：

$$2b-c+2d+2e+2g=24 \quad ⑦$$

$$3b+d+e+g=25 \quad ⑧$$

以2×⑧－⑦得：

$$4b+c=26 \quad ⑨$$

因为$c\geqslant0$，所以$4b\leqslant26$，$b\leqslant6\frac{1}{2}$.

利用⑤⑨消去c，得$f=b-2(26-4b)=9b-52$

因为$f\geqslant0$，所以$9b\geqslant52$，$b\geqslant\frac{52}{9}$. 因为$b\in\mathbf{Z}$，所以$b=6$. 即只解出乙题的学生有6人.

14. 解　$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2+mx+2\\ y=x+1(0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$无解，即 $x^2+(m-1)x+1=0$ 在$[0,2]$无解.

因为　$\Delta<0$　①

或　$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{m-1}{2}>2\\ f(2)>0\end{cases}$　②

或　$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{m-1}{2}<0\\ f(2)>0\end{cases}$　③

由①得$-1<m<3$，由②得 $m\in\varnothing$，由③得 $m\geqslant 3$

所以$\{m|m>-1\}$.

15. 分析　本题通过集合全面考查了映射的概念. 也通过映射全面加深了对函数的理解. 解题的关键是对映射 F 的理解. 本题仍然从深层次考查对存在性的理解. 对于(1)要证明唯一性，用反证法是较为常用的方法. (2)要求证明存在性，(3)则是在(2)的基础上考查映射中象与原象的概念.

解　(1)假设有两个不同的点(a,b)，(c,d)对应同一函数，即 $F(a,b)=a\cos x+b\sin x$ 与 $F(c,d)=c\cos x+d\sin x$ 相同，即 $a\cos x+b\sin x=c\cos x+d\sin x$ 对一切实数 x 均成立.

特别令 $x=0$，得 $a=c$；令 $x=\dfrac{\pi}{2}$，得 $b=d$ 这与(a,b)，(c,d)是两个不同点矛盾，假设不成立. 故不存在两个不同点对应同一函数.

(2)当 $f_0(x)\in M$ 时，可得常数 a_0，b_0，使 $f_0(x)=a_0\cos x+b_0\sin x$

$f_1(x)=f_0(x+t)=a_0\cos(x+t)+b_0\sin(x+t)$

$=(a_0\cos t+b_0\sin t)\cos x+(b_0\cos t-a_0\sin t)\sin x$

由于 a_0，b_0，t 为常数，设 $a_0\cos t+b_0\sin t=m$，$b_0\cos t-a_0\sin t=n$，则 m，n 是常数.

从而 $f_1(x)=m\cos x+n\sin x\in M$.

(3)设 $f_0(x)\in M$，由此得 $f_0(x+t)=m\cos x+n\sin x$

(其中 $m=a_0\cos t+b_0\sin t$，$n=b_0\cos t-a_0\sin t$)

在映射 F 下，$f_0(x+t)$的原象是(m,n)，则的原象是 M_1

$\{(m,n)|m=a_0\cos t+b_0\sin t,n=b_0\cos t-a_0\sin t,t\in\mathbf{R}\}$

消去 t 得 $m^2+n^2=a_0^2+b_0^2$，即在映射 F 下，M_1 的原象$\{(m,n)|m^2+n^2=a_0^2+b_0^2\}$是以原点为圆心，$\sqrt{a_0^2+b_0^2}$为半径的圆.

第2讲　简易逻辑

1. C　2. D　3. A　4. B　5. D　6. A　7. 如①x轴，$-3-\log_2 x$　②y轴，$3+\log_2(-x)$　③原点，$-3-\log_2(x)$　④直线$y=x$，2^{x-3}　8. ①②

9. $m=-\frac{1}{2}$（也可为$m=-\frac{1}{3}$）.

10. 解　由题意p,q中有且仅有一为真，一为假，

p真$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2=-m<0\Leftrightarrow m>2,q\text{真}\Leftrightarrow 1<m<3,\\x_1x_2=1>0\end{cases}$

若p假q真，则$\begin{cases}m\leqslant 2\\1<m<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<m\leqslant 2$；若$p$真$q$假，则$\begin{cases}m>2\\m\leqslant 1\text{ 或 }m\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 3$；

综上所述：$m\in(1,2]\cup[3,+\infty)$.

11. 证明　充分性：如果$xy\geqslant 0$. 则有$xy=0$和$xy>0$两种情况，

当$xy=0$时，设$x=0$，则$|x+y|=|y|$，$|x|+|y|=|y|$，所以等式成立.

当$xy>0$时，即$x>0,y>0$或$x<0,y<0$，

又当$x>0,y>0$时，$|x+y|=x+y$，$|x|+|y|=x+y$，所以等式成立.

当$x<0,y<0$时，$|x+y|=-(x+y)$，$|x|+|y|=-x-y$，所以等式成立.

综上，当$xy\geqslant 0$时，$|x+y|=|x|+|y|$成立.

必要性：若$|x+y|=|x|+|y|$且$x\cdot y\in\mathbf{R}$得

$|x+y|^2=(|x|+|y|)^2$，即$x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2|x|\cdot|y|$，

所以$|xy|=xy$，所以$xy\geqslant 0$.

综上，$xy\geqslant 0$是等式$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件.

12. (1)证明　依题意，对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\leqslant 1$，

因为$f(x)=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$，所以$f\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b}\leqslant 1$.

因为$a>0,b>0$，所以$a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(2)证明　必要性：对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f(x)$，

据此可推出$-1\leqslant f(1)$，即$a-b\geqslant -1$，所以$a\geqslant b-1$.

对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(x)\leqslant 1$，

因为$b>1$，可以推出$f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant 1$，即$a\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant 1$，

所以$a\leqslant 2\sqrt{b}$. 所以$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

充分性：因为 $b>1, a\geqslant b-1$，对任意 $x\in[0,1]$，

可以推出 $ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant -x\geqslant -1$，即 $ax-bx^2\geqslant -1$.

因为 $b>1, a\leqslant 2\sqrt{b}$. 对任意 $x\in[0,1]$，可以推出 $ax-bx^2\leqslant 2\sqrt{b}x-bx^2\leqslant 1$，即 $ax-b^2\leqslant 1$，

所以 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

综上，当 $b>1$ 时，证明对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(3)解　因为当 $a>0, 0<b\leqslant 1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)=ax-bx^2\geqslant -b\geqslant -1$.

即 $f(x)\geqslant -1$；$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f(1)\leqslant 1\Rightarrow a-b\leqslant 1$，

即 $a\leqslant b+1$.

而 $a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant (b+1)x-bx^2\leqslant 1$.

第 3 讲　几种数学思想在集合中的应用

1. 解　$A=\{x\mid -2<x<-1$ 或 $x>0\}$，$B=[x_1,x_2]$.

由 $A\cap B=(0,2]$ 知：

$$x_2=2，且 -1\leqslant x_1\leqslant 0 \qquad ①$$

由 $A\cup B=(-2,+\infty)$ 知：

$$-2<x_1\leqslant -1 \qquad ②$$

所以　$x_1=-1$.

所以　$a=-(x_1+x_2)=-1, b=x_1x_2=-2$.

2. 解　转化为方程组 $\begin{cases} y=-x^2+mx-1 \\ x+y-3=0,(0\leqslant x\leqslant 3) \end{cases}$ 有两组不同的解，即 $x^2-(m+1)x+4=0$ 有两个不同的解，显然 $x\neq 0$，并且 $m=x+\dfrac{4}{x}-1$，而 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-1$ 当 $x\in(0,2]$ 时单调递减，值域为 $[3,+\infty)$；当 $x\in[2,4]$ 时单调递增，值域为 $\left[3,\dfrac{10}{3}\right]$，由此可得 $m\in\left[3,\dfrac{10}{3}\right]$.

3. 解　集合 M 表示圆心在原点半径 3 的上半圆(包括端点)，集合 N 表示斜率为 1 的直线，由此可得 $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3$.

4. 解　易得 $a_1=1, a_4=9$，分为 $a_2^2=9$ 和 $a_3^2=9$ 两种情况讨论可得：$a_1=1, a_2=3, a_3=4, a_4=9$.

5. 解　$3\in M\Rightarrow\dfrac{3a-5}{9-a}<0\Rightarrow a>9$ 或 $a<\dfrac{5}{3}$.

又 $5\notin M\Rightarrow\dfrac{5a-5}{25-a}\geqslant0\Rightarrow1\leqslant a<25\Rightarrow1\leqslant a<\dfrac{5}{3}$ 或 $9<a<25$.

又 $a=25$ 时，$\dfrac{25x-5}{x^2-25}<0\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{5}\right)(x-5)(x+5)<0\Rightarrow$

$M=\left\{x\mid x<-5\text{ 或 }\dfrac{1}{5}<x<5\right\}$，$5\notin M$.

所以，$1\leqslant a<\dfrac{5}{3}$ 或 $9<a\leqslant25$.

6. 解 $\begin{cases}y=ax+b\\y=3x^2+15\end{cases}\Rightarrow3x^2-ax+15-b=0$ 有解

$\Rightarrow\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant0\Rightarrow a^2\geqslant12(15-b)$ ①

又 $a^2+b^2\leqslant144\Rightarrow a^2\leqslant144-b^2$ ②

所以，$144-b^2\geqslant180-12b\Rightarrow b^2-12b+36\leqslant0\Rightarrow(b-6)^2\leqslant0\Rightarrow\begin{cases}b=6\\a=\pm\sqrt{108}\end{cases}$

代入 $3x^2\pm\sqrt{108}+9=0$，得无整数解，所以不存在.

7. 解 (1)由 $kx^2-2x+6k<0$，得 $k<\dfrac{2x}{x^2+6}$，我们只考虑 $x>0$ 情形，

则 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+6}=\dfrac{2}{x+\dfrac{6}{x}}$ 在$[2,3]$的最大值为 $f(\sqrt{6})=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，最小值为 $f(2)=f(3)=\dfrac{2}{5}$，

并且 $f(x)$在$(0,\sqrt{6}]$单调递增，在$[\sqrt{6},+\infty)$单调递减，所以，若 $A\subseteq(2,3)$，必有 $k\geqslant\dfrac{2}{5}$.

(2)根据第一问分析，若$(2,3)\subseteq A$，则 $k\leqslant\dfrac{2}{5}$ 并且 $k\neq0$.

(3)由第一问分析，若 $A\cap(2,3)\neq\varnothing$，则 $k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 并且 $k\neq0$.

第 4 讲 集合与元素

1. 解 1001.

设 T 中共有 k 个元素，用最大元素减其他元素，所得的差均不在 T 中，所以 $k+(k-1)\leqslant2001$，即 $k\leqslant1001$. 又 S 的子集$\{1001,1002,\cdots,2001\}$共有 1001 个元素，符合要求所以 $k_{\max}=1001$.

2. 解　这 10 个元素的总和 $S<100\times 10=1000$

而 A 的子集总共有 $2^{10}=1024>1000>S$

根据抽屉原理，至少存在两个子集，他们的元素之和相等，记为 M、N，如果 M、N 没有公共元素，则 M、N 就是满足题意的子集，命题得证. 如果 M、N 中有公共元素，记 $M\cap N=Q$，

考查集合 $M'=M-Q$，$N'=N-Q$

则 M'、N' 中没有公共元素，且 M'、N' 的元素之和相等，同时它们都是 A 的子集.

即 M'、N' 为所求集合.

命题成立！

3. 解　由④若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$ 可知，若 $x\in P$，则 $kx\in P(k\in\mathbf{N})$

(1) 由①可设 $x,y\in P$，且 $x>0,y<0$，则 $-yx=|y|x(|y|\in\mathbf{N})$

故 $xy,-yx\in P$，由④知 $0=(-yx)+xy\in P$.

(2) $2\notin P$. 若 $2\in P$，则 P 中的负数全为偶数，不然的话，当 $-(2k+1)\in P(k\in\mathbf{N})$ 时，$-1=(-2k-1)+2k\in P$，与③矛盾.

于是，由②知 P 中必有正奇数. 设 $-2m,2n-1\in P(m,n\in\mathbf{N})$，我们取适当正整数 q，使 $q\cdot|-2m|>2n-1$，则负奇数 $-2qm+(2n-1)\in P$. 前后矛盾.

4. 证明　设任意的 $r\in\mathbf{Q}$，$r\neq 0$，由②知 $r\in S$ 或 $-r\in S$ 之一成立. 再由①，若 $r\in S$，则 $r^2\in S$；若 $-r\in S$，则 $r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$. 总之，$r^2\in S$.

取 $r=1$，则 $1\in S$. 再由①，$2=1+1\in S$，$3=1+2\in S$，…，可知全体正整数都属于 S.

设 $p,q\in S$，由①知 $pq\in S$，又由前证知 $\frac{1}{q^2}\in S$，所以 $\frac{p}{q}=pq\cdot\frac{1}{q^2}\in S$.

因此，S 含有全体正有理数.

再由①知，0 及全体负有理数不属于 S. 即 S 是由全体正有理数组成的集合.

5. 解　首先证明 $2\in A$，只要其中有一个为偶数；否则 $1+bc$ 为偶数.

再证明 $3\in A$，

只要其中含有 3 的倍数，否则，含有 3 的倍数加 1，不妨设为 b，则 $1+2b$ 为 3 的倍数；若三个数均为 3 的倍数加 2，则必为 6 的倍数加 2 或者 6 的倍数减 1，若为 6 的倍数加 2，则其中含有 3 的倍数加 1，同样有 3；若都是 6 的倍数减 1，则 $1+bc$ 为 6 的倍数加 2，结论成立.

所以，$3\in A$，那么 $1+2\times 3=7\in A$，$1+2\times 7=15\in A\Rightarrow 5\in A$，$1+3\times 5=16\in A\Rightarrow 4\in A$，$1+5\times 7=36\in A\Rightarrow 6\in A$，

所以 $1,2,3,4,5,6,7\in A$，若小于等于 $2k+1(k\geqslant 3)$ 的正整数都属于 A，则 $1+2(k+1)=2k+3\in A$，$1+(2k+1)(2k+3)=(2k+2)^2\in A$，所以 $2k+2\in A$，

则小于等于 $2(k+1)+1$ 的正整数都属于 A，由数学归纳法可知，原结论成立.

6. 解 (1)$2\in A\Rightarrow -1\in A\Rightarrow \frac{1}{2}\in A\Rightarrow 2\in A$,

所以 A 中至少还有两个元素:-1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)如果 A 为单元素集合,则 $a=\frac{1}{1-a}$,

即 $a^2-a+1=0$,

该方程无实数解,故在实数范围内,A 不可能是单元素集.

但该方程有两个虚数解:$a=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

故在复数范围内,A 可以是单元素集,$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ 或 $A=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

(3)$a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in A\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in A$,即 $1-\frac{1}{a}\in A$,

7. 解 在 $f^2(x)\leqslant 2x^2f\left(\frac{x}{2}\right)$ 中,令 $x=0$,可得 $f^2(0)\leqslant 0$ 所以,$f(0)=0$,$0\notin A$.

于是必有一个实数 $a(a\neq 0)$,使 $a\in A$,即 $f(a)>a^2$.

由已知 $f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{a^4}{2a^2}>\left(\frac{a}{2}\right)^2$,故 $\frac{a}{2}\in A$.

同理,$\frac{a}{4}$,$\frac{a}{8}$,…,$\frac{a}{2^n}$,…均是 A 的元素.

所以 A 是无限集.

8. 证明 (1)令 $A_i=\{(x,y):100n+i\leqslant x^2+y^2<100n+i+1,n=0,1,2,\cdots\}$ $i=0,1,2,\cdots,99$.

则 $A_0,A_1,\cdots,A_{99}$ 满足要求.

(2)解 $r_{\max}=3$.

①用归纳法可证,可取无穷多个有理点 P_i,$i=1,2,\cdots$,使得任意三点不共线.

令 $A_i=\{P_{99n+i}:n=0,1,2,\cdots\}$,$i=1,2,\cdots,99$.

$A_{100}=Q^2/(A_1\cup\cdots\cup A_{99})$.

此例表明 $r_{\max}\leqslant 3$.

②下证 $r_{\max}\geqslant 3$.

设 $A_1\cup\cdots\cup A_{99}\cup A_{100}=Q^2$,$|A_i|=\infty$,$i=1,2,\cdots,100$.

假设任一直线至多过 $A_1,A_2,\cdots,A_{100}$ 中的 2 个集合. 取 $P_1\in A_1$,$P_2\in A_2$,$P_3\in A_3$.

对任取 $P\in A_4\cup\cdots\cup A_{99}\cup A_{100}$. 由假设有:

$PP_1\cap P_2P_3=\varnothing$,$PP_2\cap P_1P_3=\varnothing$,$PP_3\cap P_1P_2=\varnothing$,

即 $$PP_1 /\!/ P_2P_3, PP_2 /\!/ P_1P_3, PP_3 /\!/ P_1P_2, \qquad (1)$$

由假设 P_2P_3 与 P_1P_3 不重合，设 l_1 为过 P_1 且平行于 P_2P_3 的直线，l_2 为过 P_2 且平行于 P_1P_3 的直线，则 l_1 不平行于 l_2. 由(1)知，$A_4\cup\cdots\cup A_{99}\cup A_{100}$ 中任何点 P 既在 l_1 上也在 l_2 上. 从而在 $l_1\cap l_2$ 上，但 $|l_1\cap l_2|=1$，$|A_4\cup\cdots\cup A_{100}|=\infty$. 矛盾.

所以任一直线至少过 $A_1,A_2,\cdots,A_{100}$ 中的 3 个集合.

9. 证　设有限集 A 含 n 个元素. 当 $n=1$ 时，子集序列 $\varnothing$，A 即满足条件.

假设 $n=k$ 时命题成立，对于 $k+1$ 元集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\}$

由归纳假设，$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 的子集可排成序列

$B_1,B_2,\cdots,B_t(t=2^k)$

满足要求. 因此 A 的子集也可排成序列

$B_1,B_2,\cdots,B_t,B_t\cup\{x_{k+1}\},B_{t-1}\cup\{x_{k+1}\},\cdots,B_2\cup\{x_{k+1}\}B_1\cup\{x_{k+1}\}$，

满足要求.

于是命题对一切自然数 n 均成立.

10. 证明(反证法)

若对 $\forall i,j,t,l\in\{1,2,\cdots,n\}$(至少有三个互不相同)均有 $x_i-x_j\neq x_t-x_l$.

则将证明，对 $\forall k$，$l<k<n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]\text{成立.}$$

不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，对 $\forall m$，$k<m\leqslant n$ 考虑

$(x_{i+1}-x_i)\quad(i=1,2,\cdots,m-1)$

$(x_{i+2}-x_i)\quad(i=1,2,\cdots,m-2)$

…

$(x_{i+k}-x_i)\quad(i=1,2,\cdots,m-k)$

由假设 $x_j-x_i(1\leqslant i<j\leqslant m)$ 互不相等，且 $x_i\geqslant 0$. 因此

$$M=\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{m-2}(x_{i+2}-x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{m-k}(x_{i+k}-x_i)$$

$$\geqslant 0+1+2+3+\cdots+\left[\frac{(2m-1-k)k}{2}\right]=\frac{(2m-1-k)k}{2}\left[\frac{(2m-1)k}{2}-1\right]\frac{1}{2}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}m^2k^2-\frac{1}{2}k[k(k+1)+1]m$$

又 $$M=\sum_{i=1}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{m-2}(x_{i+2}-x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{m-k}(x_{i+k}-x_i)$$

$$(x_m-x_1)+(x_m+x_{m-1}-x_2-x_1)+\cdots+(x_m+x_{m-1}+\cdots+x_{m-k+1}-x_k-x_{k-1}-\cdots-x_1)$$

$$\leqslant kx_m+(k-1)x_{m-1}+\cdots+x_{m-k+1}\leqslant kx_m+(k-1)x_m+\cdots+x_n=\frac{k(k+1)}{2}x_m$$

于是 $\frac{k(k+1)}{2}x_m \geqslant \frac{1}{2}m^2k^2 - \frac{1}{2}k[k(k+1)+1]m$

所以 $x_m \geqslant \frac{k}{k+1}m^2 - \frac{k(k+1)+1}{k+1}m \geqslant \frac{k}{k+1}m^2 - (k+1)m, (k<m\leqslant n)$

显然，当 $1\leqslant m\leqslant k$ 时也成立. 因此，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i \geqslant \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{n}i^2 - (k+1)\sum_{i=1}^{n}i = \frac{1}{k+1}\left[k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (k+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

对 $1<k<n$ 成立. 矛盾.

第 5 讲　集合的基本划分

1. 证明　由题设，$\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的任何元素必属于且只属于它的真子集 A, B 之一.

假设结论不真，则存在如题设的 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的真子集 A, B，使得无论是 A 还是 B 中的任两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1\in A$，则 $3\notin A$，否则 $1+3=2^2$，与假设矛盾，所以 $3\in B$. 同样 $6\notin B$，所以 $6\in A$，这时 $10\notin A$，即 $10\in B$. 因 $n\geqslant 15$，而 15 或者在 A 中，或者在 B 中，但当 $15\in A$ 时，因 $1\in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15\in B$ 时，因 $10\in B$，于是有 $10+15=5^2$，仍然矛盾. 因此假设不真. 即结论成立.

2. 证　设 $S=\sum_{i=1}^{n}|r_i|$，且对于 $i=0,1,2$

定义：$S_i=\sum_{r_j\geqslant 0, j\equiv i(\bmod 3)} r_j$，$t_i=\sum_{r_j<0, j\equiv i(\bmod 3)} r_j$

则有 $S=s_1+s_2+s_3-t_1-t_2-t_3$，

所以 $2S=(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_3+s_1)-(t_1+t_2)-(t_2+t_3)-(t_3+t_2)$

因此，$\exists\, i_1\neq i_2$，$S_{i_1}+S_{i_2}\geqslant\frac{S}{3}$(1)，$t_{i_1}+t_{i_2}\leqslant\frac{-S}{3}$(2) 中的至少一个成立. 不失一般性，假设：$S_{i_1}+S_{i_2}\geqslant\frac{S}{3}$，且 $|S_{i_1}+S_{i_2}|\geqslant|t_{i_1}+t_{i_2}|$，

所以 $S_{i_1}+S_{i_2}+t_{i_1}+t_{i_2}\geqslant 0$.

则有：$[S_{i_1}+S_{i_2}+t_{i_1}]+[S_{i_1}+S_{i_2}+t_{i_2}]\geqslant S_{i_1}+S_{i_2}\geqslant\frac{S}{3}$，

所以至少在 $S_{i_1}+S_{i_2}+t_{i_1}$ 与 $S_{i_1}+S_{i_2}+t_{i_2}$ 中有一个大于或等于 $\frac{S}{6}$，

即为集合 S.

3. 证　构造 $T_i=\{b\in S\,|\,a_i\,|\,b\}$，$i=1,2,\cdots,n$. 则

$$|T_i|=\left[\frac{m}{a_i}\right],$$

由于 T 中任意两个数都不能同时整除 S 中的一个数，所以当 $i\neq j$ 时，

$$T_i\cap T_j=\varnothing.$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}|T_i|=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]\leqslant m.$$

又因为
$$\frac{m}{a_i}<\left[\frac{m}{a_i}\right]+1,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{m}{a_i}\right]+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}1\leqslant m+n,$$

即
$$m\sum\frac{1}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<m+n,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{m+n}{m}.$$

4. 解　因为 7 是质数，且不能被约掉，所以，它一定在第一组中，且有 $\frac{p_1}{p_2}\geqslant 7$. 当 $p_1=3\times5\times6\times7\times8$，$p_2=1\times2\times4\times9\times10$ 时，最小值 7 可以取到.

5. 解　1003 种.

设 $x_1\leqslant x_2$ 是方程的根，则 $x_1+x_2=S(A)$，$x_1x_2=S(B)$，且 $x_1,x_2\in\mathbf{Z}_+$. 所以，

$$(x_1+1)(x_2+1)=S(B)+S(A)+1=1+2+4+\cdots+2^{2005}+1=2^{2006},$$

即 $x_1+1=2^k$，

$x_2+1=2^{2006-k}$，

$k=1,2,\cdots,1003$.

反之，当 $x_1+1=2^k$，$x_2+1=2^{2006-k}$ 时，它们是方程 $x^2-px+q=0$ 的根，其中 $p=2^k+2^{2006-k}-2$，$q=2^{2006}-1-p$. 则数 p 有唯一的二进制表达式，在该表达式中，2 的最高方幂不超过 2005. 又由于 $p+q=2^{2006}-1$，所以，在 p 的二进制表达式中是 1 的地方，在 q 的二进制表达式中刚好是 0，反之亦然，故对于每个 $k(1\leqslant k\leqslant 1003)$ 都存在唯一的分拆 (A,B)，使得方程的根刚好为 x_1，x_2.

6. 解　答案为 2^{501}. 对 $m,n\in A$，若 $m+n=1001$ 或 2003 或 3005，则称 m 与 n“有关”.

易知与 1 有关的数仅有 1000 和 2002，与 1001 和 2002 有关的都是 1 和 1003，与 1003 有关的为 1000 和 2002.

所以，对于 1，1003，1000，2002 必须分别为两组{1，1003}，{1000，2002}，

同样可划分其他各组{2，1004}，{999，2001}，{3，1005}，{998，2000}，…，{500，1502}，{501，1503}，{1001，1002}.

这样 A 中的 2002 个数被分划成 501 对，共 1002 组.

由于任意数与对应另一组有关，所以，若一对中一组在 A_1 中，另一组必在 A_2 中. 反之亦然，且 A_1 与 A_2 中不再有有关的数。故 A 的 M——划分的个数为 2^{501}.

7. 解 (1)若 $m<56$，令 $A_i=\{a|a\equiv i(\bmod 14),a\in A\}$，

则 $Pb<a\in A_i(i=1,2,\cdots,14)$，

均有 $56>a>b$，且 $a-b\geqslant 14$.

故 $b\leqslant a-14<42$.

于是，$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\geqslant 1+\frac{14}{b}>1+\frac{14}{42}=\frac{4}{3}$.

故正整数 $m\geqslant 56$.

(2)若 $m=56$ 时，则对 A 的任意划分 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，数 $42,43,\cdots,56$ 中，必有两个数属于同一个 A_i，它们满足 $b\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}b$.

综述，所求 m 的最小正整数值为 56.

8. 解 对 n 归纳，用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，必有 $A_1=A_2=\{1\}$，命题获证.

设命题对 $n=l$ 成立，考虑 $n=l+1$ 的情形.

此时若存在 $A_i=A_j$，则命题成立. 因此，可设

$A_1,A_2,\cdots,A_{l+2}$ 两两不同. 令

$A'_i=A_i/\{l+1\}$，则 $A'_i\subseteq\{1,2,\cdots,l\}$，$i=1,2,\cdots,l+2$.

(1)A'_i 两两不同. 此时，考虑 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_{l+1}$，运用归纳假设，可得分组

$$U'_1=A'_{i_1}\cup A'_{i_2}\cup\cdots\cup A'_{i_s}=A'_{j_1}\cup A'_{j_2}\cup\cdots\cup A'_{j_t}=U'_2. \quad ①$$

如果将式①中的 A'_i 改为 A_i 后，得 $U_1=U_2$，则命题获证. 若 $U_1\neq U_2$，则必有一边含有 $l+1$，而另一边不含 $l+1$，不妨设 $l+1\in A_{i_1}$. 而对任意 $1\leqslant k\leqslant t$，均有 $l+1\notin A_{j_k}$.

此时，考虑 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_{l+2}$，中除 A'_{i_1} 以外的 $l+1$ 个集合. 利用归纳假设可得另一分组，

$$U'_3=A'_{i_1}\cup A'_{i_2}\cup\cdots\cup A'_{i_w}=A'_{j_1}\cup A'_{j_2}\cup\cdots\cup A'_{j_v}=U'_4. \quad ②$$

如果将式②中的 A'_j 改为 A_j 后，得 $U_3=U_4$，则命题获证. 若 $U_3\neq U_4$，则必有一边含有 $l+1$，而另一边不含 $l+1$，不妨设 $l+1\notin U_3$，$l+1\in U_4$. 而对任意 $1\leqslant k\leqslant t$，均有 $l+1\notin A_{i_k}$ 此时考虑下面的并集

$$U'_1\cup U'_3=U'_2\cup U'_4. \quad ③$$

则式③中两边去掉′后，必有 $U_1\cup U_3=U_2\cup U_4$.

这时，只需对式③中下标相同的集合予以处理.

注意到，$A'_{i_1}\in U'_1$，但 $A'_{i_1}\notin U'_k$，$k=2,3,4$. 故下标 i_1 仅在式③中出现一次. 从而，在将下标相同的集合去掉时(保持式③成立)，式③的两边不会变为空集. 若 A'_i 在式③中重

复出现，不妨设 $A'_i \in U'_1$，若 $A'_i \in U'_3$，则从 U'_3 中去掉 A'_i，式③仍成立；若 $A'_i \in U'_2 \cup U'_4$，由于 U'_1 与 U'_2 的下标不同，故必有 $A'_i \in U'_4$. 此时结合 $U'_1 = U'_2$ 可知，将 A'_i 从 U'_4 中去掉后，式③仍成立. 依此处理，直至式③的两边没有相同下标的项，从而命题获证.

(2)若 A'_i 中存在相同的集合($1 \leqslant i \leqslant l+2$)，这时，如果 A'_i 中有 3 个相同，不妨设 $A'_1 = A'_2 = A'_3$，则 A_1, A_2, A_3 中必有两个相等，矛盾；如果 A'_i 中有两对集合分别相等，不妨设 $A'_1 = A'_2, A'_3 = A'_4$，这时 A_1, A_2 中恰有一个含有 $l+1$，A_3, A_4 中也恰有一个含有 $l+1$. 不妨设 $l+1 \in A_1, l+1 \in A_3$，而 $l+1 \notin A_2, l+1 \notin A_4$. 此时，得到 $A_1 \cup A_4 = A_2 \cup A_3$. 命题获证.

最后，A'_i 中恰有两个集合相同，设为 $A'_1 = A'_2$，此时，$l+1$ 必恰属于 A_1, A_2 中的一个. 注意到，两个集合组 $A'_1, A'_3, \cdots, A'_{l+2}$ 与 $A'_2, A'_3, \cdots, A'_{l+2}$ 中没有相同的集合(指同一组内). 这时，利用(1)的处理方法，可知命题成立.

综述，命题对一切正整数 n 成立.

9. 解　对任一有理点 $(x, y) \in Q^2$，经通分后总可表示 $(x, y) = \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$，其中 u, v, w 为整数，$w \geqslant 1$ 且 $(u, v, w)_D = 1$.

事实上，设 $(x, y) = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right) = \left(\frac{a_2 b_1}{a_1 a_2}, \frac{a_1 b_2}{a_1 a_2}\right)$，

若 $(a_2 b_1, a_1 b_2, a_1 a_2)_D = d$，则 $\left(\frac{a_2 b_1}{d}, \frac{a_1 b_2}{d}, \frac{a_1 a_2}{d}\right)_D = 1$，

令 $\frac{a_2 b_1}{d} = u, \frac{a_1 b_2}{d} = v, \frac{a_1 a_2}{d} = w$，则 $(u, v, w) = 1$ 且 $(x, y) = \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$.

我们不必考虑只含有一个有理点的直线，因为无论对 Q^2 怎样划分，这种直线只能含有其中一个子集的点.

今设直线 l 上含有二个有理点，取两点式，经化简后，可设直线 l 的方程为 $ax + by + c = 0$，a, b, c 为整数且 $(a, b, c)_D = 1$.

而点 $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ 在 1 上当且仅当 $au + bv + cw = 0 \cdots$ ①

为讨论方便，以下我们用向量 (a, b, c) 表示直线 $ax + by + c = 0$，用向量 (u, v, w) 表示有理点 $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$。据①可知，有理点 $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ 在直线 l 上当且仅当向量 (u, v, w) 与 (a, b, c) 的内积为 0.

现考虑诸整数的奇偶性，即将各分量置于模 2(mod 2)意义下讨论。并注意 $(a, b, c)_D = 1$，$(u, v, w)_D = 1$，则 (a, b, c)，(u, v, w) 各有 7 种情况：

$(0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$，

它们分别对应于前 7 个正整数 1,2,3,4,5,6,7 的二进制表示式.

现在我们将所有直线(a,b,c)划分为三类:

$L_0=(a,b,c)$与 1,3,5,7 的二进制表示式对应;

$L_1=(a,b,c)$与 2,6 的二进制表示式对应;

$L_2=(a,b,c)$与 4 的二进制表示式对应.

即在 mod 2 意义下,

$L_0:(a,b,c)\equiv(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)$;

$L_1:(a,b,c)\equiv(0,1,0),(1,1,0)$;

$L_2:(a,b,c)\equiv(1,0,0)$.

再将有理点集 Q^2 分成三个子集:$Q^2=Q_1\cup Q_2\cup Q_3$,其中 Q_1,Q_2,Q_3 分别与上述 7 数在二进制表示式中的一位数,二位数,三位数相对应. 即:

$Q_1:(u,v,w)\equiv(0,0,1)$;

$Q_2:(u,v,w)\equiv(0,1,0),(0,1,1)$;

$Q_3:(u,v,w)\equiv(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$.

显然,Q_1,Q_2,Q_3 两两不交,且由①可知,$L_0\cap Q_1=\varnothing$,$L_1\cap Q_2=\varnothing$,$L_2\cap Q_3=\varnothing$.

因此这种划分满足条件(2).

又对于任一有理点 $P_0=\left(\frac{u_0}{w_0},\frac{v_0}{w_0}\right)$,$w_0\geqslant1$,$(u_0,v_0,w_0)_D=1$ 以及任一正数 r,以 P_0 为圆心,r 为半径的圆盘记为 D_r:

$$D_r=\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(x-\frac{u_0}{w_0}\right)^2+\left(y-\frac{v_0}{w_0}\right)^2\leqslant r^2\right\},$$

选取充分大的 n,使$\frac{u_0^2+v_0^2+1}{2^{2n}w_0^2}<r^2\cdots$②

并取$(x_1,y_1)=\left(\frac{2^nu_0}{2^nw_0+1},\frac{2^nv_0}{2^nw_0+1}\right)\in Q_1$

$(x_2,y_2)=\left(\frac{2^nu_0}{2^nw_0},\frac{2^nv_0+1}{2^nw_0}\right)\in Q_2$,

$(x_3,y_3)=\left(\frac{2^nu_0+1}{2^nw_0},\frac{2^nv_0}{2^nw_0}\right)\in Q_3$,

则$\left(x_1-\frac{u_0}{w_0}\right)^2+\left(y_1-\frac{v_0}{w_0}\right)^2=\frac{u_0^2+v_0^2}{w_0^2(2^nw_0+1)^2}<\frac{u_0^2+v_0^2+1}{2^{2n}w_0^2}<r^2$,

所以$(x_1,y_1)\in D_r$,

$\left(x_2-\frac{u_0}{w_0}\right)^2+\left(y_2-\frac{v_0}{w_0}\right)^2=\frac{1}{2^{2n}w_0^2}<\frac{u_0^2+v_0^2+1}{2^{2n}w_0^2}<r^2$,

所以$(x_2,y_2)\in D_r$,

$$\left(x_3-\frac{u_0}{w_0}\right)^2+\left(y_3-\frac{v_0}{w_0}\right)^2=\frac{1}{2^{2n}w_0^2}<\frac{u_0^2+v_0^2+1}{2^{2n}w_0^2}<r^2,$$

所以$(x_3,y_3)\in D_r$.

从而$D_r\cap Q_1\neq\varnothing$,$D_r\cap Q_2\neq\varnothing$,$D_r\cap Q_3\neq\varnothing$,从而这种划分适合条件(1).

10.解　充分性.

设$p+q$可以被3整除.假设

$p\equiv1(\bmod 3)$,$q\equiv2(\bmod 3)$.

定义$A=\{a\in\mathbf{N}^*\mid a\equiv0(\bmod 3)\}$,$B=\{b\in\mathbf{N}^*\mid b\equiv1(\bmod 3)\}$,

$C=\{c\in\mathbf{N}^*\mid c\equiv2(\bmod 3)\}$.

容易验证$z,z+p,z+q$分别属于这三个不同的子集,所以,这三个子集满足条件.

必要性.

设存在一种分拆,且假设

$z\in A,z+p\in B,z+q\in C$.

由于$(z+p)+q\notin B,(z+q)+p\notin C$,所以,$z+p+q\in A$.

于是,如果$z_1\equiv z_2(\bmod (p+q))$,则$z_1$和$z_2$属于同一个子集.

闭区间$I=[0,p+q-1]$中包含$p+q$个不同的整数,模$p+q$的剩余类只对应着I中的一个整数.

下面证明:I中的整数分别属于A,B,C的数目相等,即一定有$p+q$可以被3整除.

对于每一个$z\in A\cap I$,定义$p(z)$为$z+p$模$p+q$的余数,$q(z)$为$z+q$模$p+q$的余数.显然$p(z)\notin A,q(z)\notin A$.而且,对于所有$z,z_1,z_2\in A\cap I$,我们有$p(z)\neq q(z)$.当$z_1\neq z_2$时,$p(z_1)\neq p(z_2),q(z_1)\neq q(z_2)$.若存在$z_1$、$z_2$,使得$p(z_1)=q(z_2)$,则$p(z_1)-q=q(z_2)-q\in A$.于是,$z_1+2p=p(z_1)-q+(p+q)\in A$.

另一方面,$(z_1+p)+q\in A$,所以,$z_1+p\notin A$,同时$(z_1+p)+p=z_1+2p\notin A$,矛盾.

因此,集合$I\cap(B\cup C)$中元素的数目至少是集合$I\cap A$中元素数目的两倍.

故$p+q=|I|=|A\cap I|+|(B\cup C)\cap I|\geqslant3|A\cap I|$.

类似地,$p+q\geqslant3|B\cap I|$,$p+q\geqslant3|C\cap I|$.

但$p+q=|A\cap I|+|B\cap I|+|C\cap I|$,所以,$|A\cap I|=|B\cap I|=|C\cap I|$.

于是,$p+q=3|A\cap I|$.

第6讲　集合的应用

1.解　记$A_0=\{0,7\}$,$A_1=\{1,6\}$,$A_2=\{2,5\}$,$A_3=\{3,4\}$.由条件(2)可知A_i中元素的象必在同一个A_j.由(1),不同的A_i,相应的A_j不同.于是i与$j(1\leqslant i,j\leqslant4)$的有序对有4!种配法,而各个$A_j$中的元素作为象可以互换,因而有$2^4$种.故所要求的映射共有4

$\times 2^4=384$(种).

2. 解　1,3,6,8 中每两个数的差为素数,所以 $f(1),f(3),f(6),f(8)$ 互不相同,$|A|\geqslant 4$. 另一方面,令 $A=\{0,1,2,3\}$. 对每一自然数 n,令 $f(n)$ 为 n 除以 4 所得余数,则在 $f(i)=f(j)$ 时,$|i-j|$ 被 4 整除. 因而 f 是满足条件的函数. 于是 A 的元素个数最少为 4.

3. 解　集合 A 中两个数的和共有 $\frac{7\times 6}{2}=21$ 个(如果其中某两个和相等,假如 $a+b=c+d$,a,b,c,d 互不相同,则 a,b,c,d 符合要求. 因此,可以假定任何两个和都不相等). 对于 21 个不同的和,至少有 2 个被 20 除的余数相同,记这两个和为 $a+b$、$c+d$.

如果在 a,b,c,d 中,不是任何两个都互不相同,不失一般性,可假定 $a=c$,则 $b-d$ 能被 20 整除.

由于 $-20<b-d<20$,可导出 $b=d$,这与前面关于和的选取矛盾.

又由于 $a+b$ 与 $c+d$ 被 20 除的余数相同,因此,$a+b-c-d$ 一定能被 20 整除,且 a,b,c,d 互不相同.

4. 解　记 $i\in M(i=1,2,\cdots,10)$,在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中出现的次数为 $d(i)$. 首先证明 $d(i)\leqslant 4(i=1,2,\cdots,10)$.

事实上,对 $i\in M$,与 M 中另 9 个元素之一$(j\neq i)$组成二元组(i,j)在所有满足题设的五元子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中最多出现两次,因此 i 参与组成的 9 个二元组$(i\neq j)$最多出现 $2\times 9=18$ 次. 由于 $|A_j|=5(j=1,2,\cdots,k)$,而每个含 i 的子集恰有 4 个二元组(i,j),因此 $4\cdot d(i)\leqslant 18$,故 $d(i)\leqslant 4$.

其次,k 个 5 元子集共有 $5k$ 个元素,而每个 M 的元素在 $A_1,\cdots,A_k$ 中出现的次数为 $d(i)$,从而 $5k=d(1)+\cdots+d(10)\leqslant 4\times 10\Rightarrow k\leqslant 8$.

另外,当 $k=8$ 时,下述 8 个 5 元数集的确满足要求:

$A_1=\{1,2,3,4,5\}$　　$A_2=\{1,6,7,8,9\}$

$A_3=\{1,3,5,6,8\}$　　$A_4=\{1,2,4,7,9\}$

$A_5=\{2,3,6,7,10\}$　　$A_6=\{3,4,7,8,10\}$

$A_7=\{4,5,8,9,10\}$　　$A_8=\{2,5,6,9,10\}$

故 $k_{\min}=8$.

5. 解　考虑如下三种情况:

(1)n 能被 5 整除,设 $d_1,d_2,\cdots,d_m$ 为 S_n 中所有个位数为 3 的元素,则 S_n 中还包括 $5d_1,5d_2,\cdots,5d_m$ 这 m 个个位数为 5 的元素. 所以,S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

(2)n 不能被 5 整除,且 n 质因子的个位数均为 1 或 9,则 S_n 中所有的元素的个位数均为 1 或 9. 结论成立.

(3)n 不能被 5 整除,且 n 有个位数为 3 或 7 的质因子 p,令 $n=p^r q$,其中 q 和 r 都是

正整数，p 和 q 互质. 设 $S_q=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 为 q 的所有正约数组成的集合，将 S_n 中的元素写成如下的方阵：

$$a_1,a_1p,a_1p^2,\cdots,a_1p^r,$$
$$a_2,a_2p,a_2p^2,\cdots,a_2p^r,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_k,a_kp,a_kp^2,\cdots,a_kp^r.$$

对于 $d_i=a_jp^l$ 选择 a_jp^{l-1} 或 a_jp^{l+1} 之一与之配对(所选的数必须在 S_n 中). 设 e_i 为所选的数，我们称 (d_i,e_i) 为一对朋友. 如果 d_i 的个位数都是 3，则由 p 的个位数是 3 或 7 知 e_i 的个位数不是 3.

假设 d_i 和 d_j 的个位数都是 3，且有相同的朋友 $e=a_sp^r$，则 $\{d_i,d_j\}=\{a_sp^{r-1},a_sp^{r+1}\}$. 因为 p 的个位数是 3 或 7，从而，p^2 的个位数是 9. 而 n 不能被 5 整除，故 a_s 的个位数不为 0. 所以，a_sp^{r-1}，$a_sp^{r-1}\cdot p^2=a_sp^{r+1}$ 的个位数不同. 这与 d_i 和 d_j 的个位数都是 3 矛盾，因此，每个个位数为 3 的 d_i 均有不同的朋友.

综述，S_n 中每个个位数为 3 的元素，均与一个 S_n 中个位数不为 3 的元素为朋友，而且两个个位数为 3 的不同元素的朋友也是不同的. 所以，S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

6. 解　(1)不一定成立　(2)成立

(1)考虑集合 $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}_+$.

$R\subseteq R_++aZ$ 等价于对任意的 $x\in\mathbf{R}$，存在 $y\in\mathbf{R}_+$，$n\in\mathbf{Z}$(依赖于 x)满足 $x=y+an$. 为证明此等式，只须选择 $n\in\mathbf{Z}$，使得 $x-an>0$，则 $y=(x-an)\in\mathbf{R}_+$.

从而，结论 $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{R}_++aZ$ 成立.

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}_+$，$x=x+a\cdot 0$ 成立，所以，$\mathbf{R}_+\subseteq\mathbf{R}+aZ$ 显然.

由此，尽管条件成立，但集合 A 与 B 不等.

(2)若 B 有界，则存在正整数 M，使得对任意的 $y\in B$，有 $|y|<M$.

首先证明，$A\subseteq B$. 假设 A 不包含于 B，那么，存在元素 $x\in A$，但 $x\notin B$. 设 $a>|x|+M$. 因为 $A\subseteq B+aZ$，所以，对某个 $y\in B$，有 $x=y+an$. 由 $x\neq y$，有 $n\neq 0$，故有

$x-y=an$，$|x-y|=a|n|$.

从而，$|x-y|\geqslant a$. 于是，

$|x|+M<a\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|<|x|+M$.

矛盾. 从而，任一 $x\in A$，有 $x\in B$，故 $A\subseteq B$.

特别地，A 有界.

由于 A 有界，类似地得 $B\subseteq A$.

因此，$A=B$.

7. 解　这样的存在. 首先令 $X_2=\{0,1\}$. 假设已有 $X_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，使得 a_i+2a_j $(1\leqslant i,j\leqslant k)$ 互不相同.

令 $S_k=\{a_i+2a_j(1\leqslant i,j\leqslant k)\}$. 对任一不属于 S_k 的整数 n，取正整数 a_{k+1}，

又令 $a_{k+2}=2a_{k+1}+n$.

只要 a_{k+1} 充分大，对 $1\leqslant i,j,s,t\leqslant k$，有

$3a_{k+1}>a_i+2a_{k+1}>a_{k+1}+2a_i>na_{k+2}+2a_j>a_{k+1}+2a_{k+2}>a_i+2a_{k+2}>3a_{k+2}$，

而且 $a_{k+1}+2a_i$ 大于 S_k 中一切正数，$a_{k+2}+2a_j$ 小于 S_k 中一切负数.

于是，对 $X_{k+2}=\{a_{k+1},a_{k+2}\}\cup X_k$ 中任二数 a、b，$(a+2b)$ 互不相同.

令 $X=X_2\cup X_4\cup\cdots\cup X_{2k}\cup X_{2k+2}\cup\cdots$

则 X 满足要求.

8. 解　$k=1,2,3$ 时，$f(k)=0$. $k=4(100)_2$ 时，$f(k)=1$.

若 $k+1$ 的二进制表示中恰有三个 1，那么 $2(k+1)$ 的二进制表示中也恰有三个 1，所以 $f(k+1)\geqslant f(k)$.

当且仅当 $2k+1$ 的二进制表示中恰有三个 1 时，$f(k+1)=f(k)+1$. 即 $k=(100\ldots0100\ldots0)_2$[包括 $k=(10\ldots01)_2$ 在内]时，$f(k+1)=f(k)+1$. 由于这样的 k 有无穷多个，所以 $f(k)$ 从 1 逐一增加至无穷(即(a)成立).

并且仅在 $k=(10\ldots01)_2$ 时，$f(k)$，$f(k+1)$ 连续(比前一项)增加 1，从而当且仅当 $k=(10\ldots010)_2=2^{n+1}+2$ 时，$m=f(k)$ 仅出现一次.

显然 $k=(1\overbrace{0\ldots0}^{n\text{个}0}0)_2$ 时，$k+1,k+2,\cdots,2k$ 中有 C_n^2 个数，二进制表示中恰有三个 1(在 n 个位置中选两个放 1 有 C_n^2 种方法)，

即此时 $f(k)=C_n^2$. 根据上面所说，

对 $k=(10\ldots010)_2=2^{n+1}+2$，$f(k)=C_n^2+1$，

即(b)的解是 $m=C_n^2+1(n\in N)$.

9. 解　(1)因为 A 有 2^k 个子集(包括空集)，且任意两个子集的元素之和互不相等，所以 A 的元素之和至少有 2^k-1 个.

若 $k\geqslant7$，则 $2^k-1>16k$，不可能.

若 $k=6$，考虑 A 的一、二、三、四元子集，共有 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$ 个不同的和，且最小的和是 1，最大的和是 $16+15+14+12=57$(其中 $16+13=15+14$，故这 4 个数不能同在 A 中).

若 $1\in A$，则最大的和是 $16+14+12+9=51$(其中 $16=15+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$14=13+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$12=11+1$，故这 3 个数不能同在 A 中；$16+10=14+12$ 故这 4 个数不能同在 A 中)，最多有 51 个不同的和，矛盾.

若 $2\in A$，则最大的和是 $16+15+12+9=52$，最多有 51 个不同的和，矛盾.

若 $1\notin A,2\notin A$，则在$[3,57]$中至多有 55 个和，矛盾.

故 $k\leqslant 5$.

(2)若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,16\}$元素的和小于 16，则集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k,16\}$中无元素的和相等的子集，与 A 的定义矛盾. $A=\{1,2,4,9\}$满足条件，其元素之和 16 是最小的.

若 $16\notin A$，则 $15+14+13+11+8=61$.

若 $16\in A,15\notin A$，则 $16+14+13+12+8=63$；

若 $15\in A,14\notin A$，则 $16+15+13+11+7=62$.

设$\{14,15,16\}\subsetneqq A$，则 $13\notin A$.

若 $12\notin A$，则 $16+15+14+11+8=64$.

若 $12\in A$，由于 $16+11=15+12,16+10=14+12$，故设 $9\in A$，

因此，集合 $A=\{9,12,14,15,16\}$满足条件，其元素之和 66 是最大的.

10. 解　首先，我们有 $n\geqslant 16$. 事实上，取集合 $A_0=\{1,2^2,3^2,5^2,\cdots,41^2,43^2\}$，则 $A_0\subseteq S,|A_0|=15$，A_0 中任意两数互质，但其中无质数，这表明 $n\geqslant 16$.

其次，我们证明：对任意 $A\subseteq S,n=|A|=16$，A 中任两数互质，则 A 中必存在一个质数.

利用反证法，假设 A 中无质数. 记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{16}\}$，分两种情况讨论.

(3) 若 $1\notin A$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{16}$ 均为合数，又因为$(a_i,a_j)=1(1\leqslant i<j\leqslant 16)$，所以 a_i 与 a_j 的质因数均不相同，设 a_i 的最小质因数为 p_i，

不妨设　　$p_1<p_2<\cdots<p_{16}$，

则　　$a_1\geqslant p_1^2\geqslant 2^2,a_2\geqslant p_2^2\geqslant 3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant 47^2>2005$，矛盾.

(4)若 $1\in A$，则不妨设 $a_{16}=1,a_1,\cdots,a_{15}$ 均为合数，同(1)所设，同理有

$a_1\geqslant p_1^2\geqslant 2^2,a_2\geqslant p_2^2\geqslant 3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant 47^2>2005$，矛盾.

由(1)，(2)知，反设不成立，从而 A 中必有质数，即 $n=|A|=16$ 时结论成立.

综上，所求的最小值为 16.

11. 证明　取 S 中 49 个偶数的集合 $E=\{2x|x\in\mathbf{N}$，且 $1\leqslant x\leqslant 49\}$，则 E 中任取 $k(k\geqslant 10)$个数，从中都不能选出 10 个满足要求的数. 故 $n\geqslant 50$.

对于 S 中任一奇数 x，S 中与 x 不互质的偶数个数 $f(x)\leqslant\left[\dfrac{49}{3}\right]=16$ 个.

设 T 为 S 的任一 50 元的子集，T 中有偶数 α 个，奇数 $50-\alpha=\beta$ 个. 由于$|E|=49$，故 T 中至少有一奇数

S 中最小质因子为 k(k 为质数)的数所成集合记为 R_k，则

$R_3=\{3\times1,3\times3,\cdots,3\times31\}$，$|P_3|=16$；

$R_5=\{5\times1,5\times5,5\times7,5\times11,5\times13,5\times15,5\times19\}$，$|P_5|=7$，

$R_7=\{7\times1,7\times7,7\times11,7\times13\}$，$|P_7|=4$，

$|R_k|=1$(k 为大于 10 的质数).

若 T 中存在一奇数 x,T 中与 x 互质的偶数个数$\geqslant 9$.则 T 满足题目要求.

① 若 $\alpha\geqslant 25$,

则由于 $f(x)\leqslant 16$,故 T 中任一奇数 a,与 a 互质的偶数个数$\geqslant 25-16=9$.问题可证.

② 若 $16\leqslant\alpha\leqslant 24$,则 $\beta\geqslant 26$.

由于$|\{1\}\cup R_3\cup R_5|=1+16+7=24<\beta$,故 T 中至少的一个奇数 $a\in R_7\cup R_k$,而 $f(a)\leqslant f(7)=\left[\dfrac{49}{7}\right]=7$.于是 T 中与 a 互质的偶数个数$\geqslant 16-7=9$.问题可证.

③ 若 $10\leqslant\alpha\leqslant 15$,则 $\beta\geqslant 35$.

由于$|\{1\}\cup R_3\cup R_5\cup R_7\cup\{11,13,17,19,23,29\}|=34<\beta$.故 T 中至少的一个奇数 $a\geqslant 31$,而 $f(a)=1$.于是 T 中与 a 互质的偶数个数$\geqslant 10-1=9$.问题可证.

④ 若 $\alpha=9$,则 $\beta=41$,

由于$|\{1\}\cup R_3\cup R_5\cup R_7\cup\{11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}|=39<\beta$,故 T 中必有一质数 $a\geqslant 53$,于是 T 中的 9 个偶数都与 a 互质.问题可证.

⑤ 若 $\alpha\leqslant 8$,$\beta\geqslant 42$,

由于$|\{1\}\cup R_3\cup R_5\cup R_7\cup\{11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}|=39<\beta$,故 T 中必有一质数 $a\geqslant 53$,此时 a 与 T 中其余的数都互质,而 S 中的奇数不在 T 中的有 $50-\beta\leqslant 7$ 个,取 T 中所有 $6k-3$ 型的奇数,至少有 $16-7=9$ 个,它们都不互质,问题可证.

综上可知,命题成立.

12.解　答案 76.

设$|S|\geqslant 3$,$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\in S$,$p_1,p_2,p_3$ 为三个不同的素数,$p_1<p_2<p_3\leqslant 7$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正整数.

设 $q\in\{2,3,5,7\}$,$q\neq p_1,p_2,p_3$,则$\{p_1,p_2,p_3,q\}=\{2,3,5,7\}$.

由(i)知存在 $c_1\in S$,使$(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3},c_1)=1$,取 c_1 为所有这样数中最小素因子最小的一个.

由(i)知存在 $c_2\in S$,使$(c_2,c_1)=1$,$(c_2,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3})=1$.

由(ii)知存在 $c_3\in S$,使$(c_3,c_1)>1$,$(c_3,c_2)>1$.

由$(c_1,c_2)=1$ 知 c_1,c_2 的最小素因子之积$\leqslant c_3\leqslant 108$.从而 $q|c_1$.

由$(c_2,c_1)=1$,$(c_2,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3})=1$,$\{p_1,p_2,p_3,q\}=\{2,3,5,7\}$,$c_2\leqslant 108$ 知 c_2 为大于 10 的素数.

由$(c_3,c_2)>1$ 知 $c_2|c_3$.又 $1<\left(c_1,\dfrac{c_3}{c_2}\right)<10$,$(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3},c_1)=1$,故 $\left(c_1,\dfrac{c_3}{c_2}\right)=q^{\alpha}$ …①

由(i)知存在 $c_4\in S$,使$(c_4,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3})=1$,$(c_4,c_3)=1$.

因此（由①）$(c_4,p_1p_2p_3q)=1$，即$(c_4,2\times3\times5\times7)=1$. 从而 c_4 为大于 10 的素数.

由(ii)知存在 $c_5\in S$，使$(c_5,c_2)>1,(c_5,c_4)>1$. 所以 $c_2|c_5,c_4|c_5$.

又 $c_2|c_3,(c_4,c_3)=1$ 知$(c_2,c_4)=1$. 所以 $c_2c_4|c_5$. 而 $c_2c_4\geqslant11\times13>108$，矛盾.

取 $S_1=\{1,2,\cdots,108\}/(\{1$ 及大于 11 的素数$\}\cup\{2\times3\times11,2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5,2\times3\times7,2^2\times3\times7,2\times5\times7,3\times5\times7\})$. 则 $|S_1|=76$.

下面证明 S_1 满足(i)，(ii).

若 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\in S_1,p_1<p_2<p_3$，则 $p_3\geqslant11$.

因此 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}=2\times3\times13$ 或 $2\times3\times17$.

①$a=2\times3\times13,b\in S_1,b\neq a$.

(a)由于 5，7，11 中至少有一个不整除 b，设为 p，则$(a,p)=(b,p)=1$.

(b)设 b 的最小素因子为 q_1，则 $2q_1\leqslant108,3q_1\leqslant108$.

若 $b\neq2q_1$，则 $2q_1\in S_1,(2q_1,a)>1,(2q_1,b)>1$；若 $b\neq3q_1$，则 $3q_1\in S_1,(3q_1,a)>1,(3q_1,b)>1$.

②$a=2\times3\times17,b\neq a$，同①.

③$a=b$，由于 5，7，11 中至少有一个不整除 a，故(i)成立.

若 a 为合数，取 a 的最小素因子 p，则 $p\in S_1,(p,a)>1$；若 a 为素数，则 $a\leqslant11$，$2a\in S_1,(2a,a)>1$.

④a,b 为 S_1 中两个不同的数，a,b 均至多含两个不同素因子，$a<b$.

(a)2，3，5，7，11 中有一个 p 不能整除 ab，此时 $p\in S_1,(p,a)=(p,b)=1$；

(b)设 a,b 的最小素因子分别为 r_1,r_2，则 $r_1r_2\leqslant108$.

若 $r_1=r_2<a$，则 $r_1\in S_1,(a,r_1)>1,(b,r_1)>1$；

若 $r_1=r_2=a$，则取 $u=2$ 或 3，使 $b\neq ua$. 则 $ua\in S,(ua,a)>1,(ua,b)>1$.

若 $r_1r_2\neq a,r_1r_2\neq b$，则 $r_1r_2\in S_1,(r_1r_2,a)>1,(r_1r_2,b)>1$.

若 $r_1r_2=a$，则 $r_1<r_2$，取 $u=2,3,5$，使 $b\neq ur_2,a\neq ur_2$，则 $ur_2\in S_1,(ur_2,a)>1,(ur_2,b)>1$.

若 $r_1r_2=b$，则取 $v=2,3,5$，使 $a\neq ur_1,b\neq ur_1$，则 $vr_1\in S_1,(vr_1,a)>1,(vr_1,b)>1$.

因此 $2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5,2\times3\times7,2^2\times3\times7,2\times5\times7,3\times5\times7$ 均不属于 S.

现证：$2\times3\times11,2\times3\times13,5\times7,7$ ⋯ ② 不属于 S.

反设②中数均属于 S. 由(i)知存在 $d_1,d_2\in S$，使 $(2\times3\times11,d_1)=1,(5\times7,d_1)=1$，$(2\times3\times13,d_2)=1,(5\times7,d_2)=1$.

因此 d_1,d_2 均为大于 10 的素数. 由(ii)知 $d_1=d_2\geqslant17$. 由(ii)知存在 $d_3\in S$，使$(7,d_3)>1,(d_2,d_3)>1$.

因此，$7d_2 | d_3$. 而 $7d_2 \geqslant 7\times 17=119$，矛盾.

另一方面，大于 10 的素数中至多有一个属于 S，$1\notin S$，这样 $|S| \leqslant 108-7-1-23-1=76$.